Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (P)

Gegeben seien die Mengen A, B und C sowie Abbildungen $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : A \to A$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussagen:

a) $g \circ f$ ist bijektiv $\implies f$ und g sind bijektiv.

b) f ist injektiv und g ist surjektiv $\implies g \circ f$ ist surjektiv.

c) $h \circ h = \mathrm{id}_A \implies h$ ist bijektiv.

Aufgabe 2 (P)

a) Auf der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei eine Relation $\sim$ gegeben durch

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \;:\Longleftrightarrow\; x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und skizzieren Sie die Äquivalenzklasse von $(-1, 2)$.

b) Für eine natürlich Zahl n und $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gelte $a \equiv b \bmod n$ und $c \equiv d \bmod n$. Zeigen Sie:

(i) $a + c \equiv b + d \bmod n$,

(ii) $a - c \equiv b - d \bmod n$,

(iii) $a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod n$.

Aufgabe 3

Es seien A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Eigenschaften:

a) f ist injektiv.

b) Für alle $X, Y \subset A$ gilt: $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

c) Für alle $X \subset Y \subset A$ gilt: $f(Y \setminus X) = f(Y) \setminus f(X)$.

Abgabe der Lösungen bis zum 7.11.2016 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit maximal 6 Punkten bewertet.