Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (P)

Es seien $(G, \bullet)$ und $(H, *)$ Gruppen und e_G bzw. e_H das jeweilige neutrale Element.
Weiter sei $\Phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Der *Kern* von Φ ist die Menge

$$\text{Kern } \Phi := \{g \in G \mid \Phi(g) = e_H\}.$$

a) Zeigen Sie:
   (i) Kern Φ ist eine Untergruppe von G.
   (ii) Φ ist genau dann injektiv, wenn Kern $\Phi = \{e_G\}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Menge $G \times H$ mit der Verknüpfung

$$(g_1, h_1) \diamond (g_2, h_2) := (g_1 \bullet g_2, h_1 * h_2)$$

eine Gruppe ist. Sie wird *direktes Produkt* von G und H genannt.
Zeigen Sie weiter, dass die Abbildung

$$\Phi : (G \times H, \diamond) \to (G, \bullet), \quad (g, h) \mapsto g,$$

ein Homomorphismus ist. Bestimmen Sie außerdem den Kern von Φ.

Aufgabe 2 (P)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und

$$T_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid a_{ij} = 0 \text{ für alle } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } i > j\}$$

die Menge der oberen Dreiecksmatrizen. Zeigen Sie:

a) $T_n(\mathbb{K})$ ist ein Ring mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen.

b) Für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ ist $\phi_k : T_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $(a_{ij}) \mapsto a_{kk}$ ein Ringhomomorphismus.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{x + \sqrt{2} \cdot y \mid x, y \in \mathbb{Q}\} \subsetneq \mathbb{R}$$

mit den üblichen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Körper ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z} \,/\, p\,\mathbb{Z}$ genau dann ein Körper ist, wenn p eine Primzahl ist.
Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis, dass für zwei teilerfremde Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{Z}$ existieren, sodass $pn + qm = 1$ gilt.

Abgabe der Lösungen bis zum 21.11.2016 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit maximal 6 Punkten bewertet.