Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (P)

a) Gegeben seien eine reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine maximale linear unabhängige Teilmenge von $\{v_1, v_2, v_3\}$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{3X - X^5,\ 4X + X^3,\ 5X - X^5 - X^6\}$$

in $\mathbb{Q}[X]$ linear unabhängig ist.
Erweitern Sie diese Menge zu einer Basis von $\{f \in \mathbb{Q}[X] \mid \deg f \leq 6\}$.

Aufgabe 2 (P)

a) Es seien im $\mathbb{R}^4$ die Basen

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \overline{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben.
Bestimmen Sie die Übergangsmatrix des Basiswechsels von B nach $\overline{B}$.

b) Für den Vektorraum der Polynome in $\mathbb{R}[X]$ vom Grad ≤ 3 seien die folgenden drei Basen gegeben:

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{1 - X^2 + X^3,\ X - X^2,\ 1 - X + X^2,\ 1 - X\}, \\ B_2 &:= \{1 - X^3,\ 1 - X^2,\ 1 - X,\ 1 + X^2 - X^3\}, \\ B_3 &:= \{1, X, X^2, X^3\}. \end{aligned}$$

Geben Sie die folgenden Komponentenvektoren in $\mathbb{R}^4$ an:

$$\begin{aligned} &\Theta_{B_1}(b) \text{ für alle } b \in B_1, \\ &\Theta_{B_3}(b) \text{ für alle } b \in B_1, \\ &\Theta_{B_3}(b) \text{ für alle } b \in B_2, \\ &\Theta_{B_1}(b) \text{ für alle } b \in B_2, \\ &\Theta_{B_2}(b) \text{ für alle } b \in B_1. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie außerdem die Übergangsmatrix des Basiswechsels von B_2 nach B_1.

Aufgabe 3

Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum sowie M_1 und M_2 Teilmengen von V. Zeigen Sie:

a) $[M_1 \cap M_2] \subset [M_1] \cap [M_2]$.

b) In (a) gilt im Allgemeinen keine Gleichheit.

c) $[M_1 \cup M_2] = \Big[[M_1] \cup [M_2]\Big]$ und insbesondere $[[M]] = [M]$.

Abgabe der Lösungen bis zum 12.12.2016 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit **maximal 6 Punkten** bewertet.