Aufgabenvorschläge für die Tutorien zur LA I (3. Woche)
31. Oktober 2016

Themen der Woche: Abbildungen, Äquivalenzrelationen

Hinweis: Alle diese Aufgaben sind als Vorschläge gedacht! Es ist nicht das Ziel, möglichst viele Aufgaben anzuschreiben. Wichtiger sind das gemeinsame Erarbeiten und Diskutieren.

Aufgabe 1

a) Wiederholen Sie die (im Skript verwendeten!) Definitionen von injektiven, surjektiven und bijektiven Abbildungen.

b) Sei $Y \subsetneq X$ eine echte Teilmenge. Kann es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ geben? Beweisen Sie Ihre Antwort.

c) Sei $f : A \to B$ eine Abbildung von der Menge A in die Menge B und $X, Y \subseteq A$ Teilmengen. Zeigen Sie dass $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ gilt.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad (x, y) \mapsto (2x + 3y, 3x + 4y).$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist, berechnen Sie die Urbilder von $(1, 0)$ und $(0, 1)$ und bestimmen Sie die Umkehrabbildung.

Aufgabe 3

Übt „Modulorechnen" anhand einfacher Beispiele.

Aufgabe 4

a) Sei M eine Menge und $\sim$ eine symmetrische und transitive Relation auf M.
Beh: Dann ist $\sim$ auch reflexiv.
Bew: Seien x und y gegeben mit $x \sim y$. Da $\sim$ symmetrisch ist, folgt $y \sim x$ und da $\sim$ transitiv ist, folgt $x \sim x$. Also ist $\sim$ auch reflexiv.

Was stimmt hier nicht?

b) Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen $\sim$ auf der jeweiligen Menge M Äquivalenzrelationen sind. Skizzieren Sie die Äquivalenzklassen und die Faktormenge $\bar{M} := M/\sim$.

- Sei $M := \mathbb{R}$ und $\sim$ gegeben durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = y + 2k\pi \ .$$

- Sei $M := \mathbb{R}^2$ und $\sim$ gegeben durch

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : (x_1 = x_2 + m) \wedge (y_1 = y_2 + n) \ .$$

- Sei $M := \mathbb{N}$ und $\sim$ gegeben durch

$$p \sim q :\Leftrightarrow p \text{ teilt } q \ .$$

c) Auf der Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ sei eine Relation $\sim$ gegeben durch

$$(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) \;:\Leftrightarrow\; z_1 n_2 = z_2 n_1.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und geben Sie eine bijektive Abbildung von der Menge M der Äquivalenzklassen, $M = \{\widetilde{(z,n)} \mid (z,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$, auf die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen an.

Wendet Euch mit Fragen und Anmerkungen bitte an Rafaela Rollin (`rafaela.rollin@kit.edu`) oder Moritz Gruber (`moritz.gruber@kit.edu`).