

Aufgabenvorschläge für die Tutorien zur LA I (5. Woche)

14. November 2016

Themen der Woche: Homomorphismen, Ringe, Körper

Aufgabe 1

Es sei $\phi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus von Gruppen. Zeigen Sie:

- a) $\phi(e_G) = e_H$.
- b) $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$ für alle $g \in G$.
- c) Das Bild $\phi(G)$ ist eine Untergruppe von H .

Aufgabe 2

Es sei $\mathcal{NF} := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0\}$ die Menge aller Nullfolgen. Wir definieren auf $\mathcal{NF}$ die Verknüpfungen

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \oplus (b_n)_{n \in \mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ und} \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \bullet (b_n)_{n \in \mathbb{N}} := (a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Zeigen Sie dass $(\mathcal{NF}, \oplus, \bullet)$ ein Ring ist. Hat dieser Ring eine Eins? Ist er nullteilerfrei?

Aufgabe 3

Wiederholen Sie die Matrizenmultiplikation abstrakt und anhand von Beispielen.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass der einzige (Körper-)Automorphismus von $\mathbb{Q}$ die Identität ist.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie alle Nullteiler von $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Aufgabe 6

- a) Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Abbildung

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, z \mapsto a^z$$

ein Homomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.

- b) Es sei $(G, \circ)$ eine beliebige Gruppe.
Geben Sie alle Homomorphismen von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(G, \circ)$ an.

Aufgabe 7

Zeigen Sie $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Wendet Euch mit Fragen und Anmerkungen bitte an Rafaela Rollin (...@kit.edu) oder Moritz Gruber (...@kit.edu).