

Aufgabenvorschläge für die Tutorien zur LA I (11. Woche)

9.1.17

Themen der Woche: Lineare Abbildungen (bis einschließlich Bild/Kern), noch keine Abbildungsmatrizen!

Hinweis: Alle diese Aufgaben sind als Vorschläge gedacht! Es ist nicht das Ziel, möglichst viele Aufgaben anzuschreiben. Wichtiger sind das gemeinsame Erarbeiten und Diskutieren.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie ihre Antwort.

- a) $\Phi_1 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto x + 1.$
- b) $\Phi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2.$
- c) $\Phi_3 : \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}), (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (b_i)_{i \in \mathbb{N}},$ wobei $b_i := a_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}.$
- d) $\Phi_4 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto cz.$ Dabei sei $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$ -Vektorraum aufgefasst und $c \in \mathbb{C}$ fest gewählt.
- e) $\Phi_5 : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}[X], \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto 3a + (b + c)X.$
- f) $\Phi_6 : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ für einen Körper $\mathbb{K}.$
- g) $\Phi_7 : V \rightarrow W, x \mapsto 0_W,$ wobei V, W beliebige $\mathbb{K}$ -Vektorräume sind.

Bestimmen Sie für diejenigen Abbildungen, die linear sind, jeweils Kern und Bild.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die $\mathbb{C}$ -Vektorräume $\mathbb{C}^{n \times n}, \mathbb{C}^{n^2}$ und $\{f \in \mathbb{C}[X] \mid \deg(f) \leq n^2 - 1\}$ isomorph sind. Geben Sie dazu Isomorphismen zwischen den Vektorräumen an.

Aufgabe 3

Es seien V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und U, W Untervektorräume von V . Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\psi : W/(W \cap U) \rightarrow (W + U)/U; x + (W \cap U) \mapsto x + U$$

ein Isomorphismus ist.

Wendet Euch mit Fragen und Anmerkungen bitte an Rafaela Rollin (rafaela.rollin@kit.edu) oder Moritz Gruber (moritz.gruber@kit.edu).