

Sheet 02

Aufgabe 1

(1) Beantworten Sie (ohne Beweis), ob die folgenden Gleichungssysteme linear sind:

$$(a) \begin{cases} x_1 + 9x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_3 + \sqrt{x_4} = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 + 9x_3 = 7 \\ 9x_3 + 13x_4 = 9 \end{cases} \quad (c) \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4}$$

$$(d) \begin{cases} 2^5 x_1 + x_2 = 7 \\ 2^7 x_1 + 2^{x_2} \cdot 3 = 3 \\ 2^9 x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

(a) Nein (b) Ja (c) Nein (d) Nein

(2) Schreiben Sie die folgende lineare Gleichungssysteme in Matrixform (oder umgekehrt):

$$(a) \begin{cases} x_1 + 9x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 \\ x_2 + 9x_3 = x_4 \\ 9x_3 + 13x_4 = x_1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$(d) x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -x_1 + x_2 - x_3 + x_5 \quad (e) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array} \right)$$

$$(a) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

$$(b) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 9x_3 + 13x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 9 & 13 & 0 \end{array} \right)$$

$$(c) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$(d) \Leftrightarrow 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \quad -2 \quad 2 \quad -1 \quad -1 \mid 0)$$

$$(e) \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 7 \\ x_4 = 9 \end{cases}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(1) Schreiben Sie die folgende Mengen in Aussageform um (z.B. $\{2, 4, 6, \dots\} \rightarrow \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$):

$$A = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \dots\} \quad B = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \quad C = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$$

$$D = \{100, 101, 102, 103, 104, \dots, 999, 1000\} \quad E = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7), \dots\}$$

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$C = \{k^2 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad D = \{k \in \mathbb{N} \mid 100 \leq k \leq 1000\}$$

$$E = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{N}, b = a+2\}$$

(2) Schreiben Sie die Matrizen auf, die durch die folgenden Aussagen definiert sind:

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}, \text{ wobei } a_{ij} = i - j;$$

$$B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 5}, \text{ wobei } b_{ij} = 0 \text{ falls } i < j, \text{ sonst } b_{ij} = 1;$$

$$C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq 3; 1 \leq j \leq 5}, \text{ wobei } c_{ij} = i \cdot j;$$

$$D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq 5}, \text{ wobei } d_{ij} \in \{0, 1\} \text{ und } d_{ij} = 1 \text{ genau dann, wenn } i \text{ und } j \text{ durch eine Kante in Abbildung 1 verbunden sind.}$$

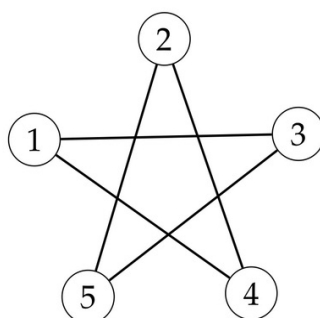


Abbildung 1: Der Graph für die Matrix D

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Bestimmen Sie ob die folgende zwei lineare Gleichungssysteme äquivalent sind:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 11x_4 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 13x_4 = 11 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -3 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

(Können Sie es tun, ohne die Gleichungssysteme zu lösen?)

Zwei LGS sind äquivalent genau dann, wenn sie dieselbe Lösungsmenge haben.

Da die elementaren Operationen am LGS dessen Lösungsmenge nicht ändern, vereinfachen wir zunächst das erste LGS mit elementaren Operationen.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 & \text{LG ①} \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 11x_4 = 3 & \text{LG ②} \\ 3x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 13x_4 = 11 & \text{LG ③} \end{cases}$$

$$\Downarrow \text{②} := \text{②} - 5 \cdot \text{①}, \text{③} := \text{③} - 3 \cdot \text{①}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ -3x_2 - 6x_3 - 9x_4 = -12 \\ x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow \text{②} \leftrightarrow \text{③}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ -3x_2 - 6x_3 - 9x_4 = -12 \end{cases}$$

$$\Downarrow \textcircled{1} := \textcircled{1} - 2 \cdot \textcircled{2}, \textcircled{3} := \textcircled{3} + 3 \cdot \textcircled{2}$$

$$\begin{cases} x_1 & + 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ & x_2 & + x_4 = 2 \\ & & - 6x_3 - 6x_4 = -6 \end{cases}$$

$$\Downarrow \textcircled{3} = -\frac{1}{6} \cdot \textcircled{3}$$

$$\begin{cases} x_1 & + 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ & x_2 & + x_4 = 2 \\ & & x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow \textcircled{1} := \textcircled{1} - 2 \cdot \textcircled{3}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -3 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{Das zweite LGS}$$

Also haben wir das erste LGS mit elementaren Operationen in das zweite LGS transformiert. Da die elementaren Operationen die Lösungsmenge nicht ändern, haben die beiden LGS dieselbe Lösungsmenge. Deswegen sind sie äquivalent.

Aufgabe 4

Gegeben seien die Mengen

$$M_1 := \{1, 2, 3, 4\}, M_2 := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3\}, M_3 := \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}, M_4 := \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Bestimmen Sie $M_1 \cap M_2$, $M_1 \cup M_2$, $M_3 \cap M_4$, $M_1 \setminus M_3$, und $(M_4 \setminus M_2) \cup M_3$.

$$M_1 \cap M_2 = \{3, 4\}, \quad M_1 \cup M_2 = \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} M_3 \cap M_4 &= \{\text{ungerade ganze Zahlen} \geq 3\} \cap \{3n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{3n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } 3n \text{ ungerade ist}\} \\ &= \{3n \mid n \in \mathbb{N} \text{ is ungerade}\} \end{aligned}$$

$$= \{3(2k-1) \mid k \in \mathbb{N}\} = \{6k-3 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$M_1 \setminus M_3 = \{1, 2, 4\}$$

$$(M_4 \setminus M_2) \cup M_3 = \emptyset \cup M_3 = M_3$$