

Sheet 04

Aufgabe 1

Sei A eine endliche Menge und sei $|A|$ die Kardinalität von A , also die Anzahl der Elemente in A . Zeigen Sie durch Induktion, dass immer $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ gilt, wobei $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A ist.

(Können Sie das auch ohne Induktion beweisen?)

Beweis (mit Induktion):

Wir machen Induktion auf $|A|$.

Induktionsanfang (Basisfall): $|A|=0$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$$

$$\Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Induktionsschritt. Sei jetzt $n \geq 0$ und wir nehmen an, dass $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ für jede Menge A mit $|A| \leq n$ gilt. Wir zeigen diese Behauptung für $|A| = n+1$. Sei A eine beliebige Menge mit $|A| = n+1$ und $b \in A$.

Dann haben wir

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) &= \{X \mid X \subseteq A, b \in X\} \cup \{X \mid X \subseteq A, b \notin X\} \\ &= \underbrace{\{X \cup \{b\} \mid X \subseteq A \setminus \{b\}\}}_{M_1} \cup \underbrace{\{X \mid X \subseteq A \setminus \{b\}\}}_{M_2} \end{aligned}$$

Weil $\forall X_1, X_2 \subseteq A \setminus \{b\}, X_1 \neq X_2 : X_1 \cup \{b\} \neq X_2 \cup \{b\}$, folgt daraus

$$|M_1| = |\{X \mid X \subseteq A \setminus \{b\}\}| = |M_2| = |\mathcal{P}(A \setminus \{b\})|$$

Da $|A \setminus \{b\}| = n$, gemäß der Induktionshypothese,

$$|\mathcal{P}(A \setminus \{b\})| = 2^n$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Auf der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei eine Relation $\sim$ gegeben durch

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) : \Longleftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und skizzieren Sie die Äquivalenzklasse von $(-1, 2)$.

Beweis:

1. Reflexiv: $\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2: x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2$
 $\Rightarrow (x_1, y_1) \sim (x_1, y_1)$

2. Symmetrisch: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$
 $\Longleftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$
 $\Longleftrightarrow x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2$
 $\Longleftrightarrow (x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$

3. Transitiv:

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$
und $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$
 $\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2$
 $\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2$
 $\Rightarrow (x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$

Äquivalenzklasse von $(-1, 2)$:

$$\widetilde{(-1, 2)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5\}$$



b) Seien p, q, r Aussagen. Ist die Aussage

$$(\neg p \vee q) \wedge (q \Rightarrow (\neg p \wedge \neg r)) \wedge (p \vee r)$$

wahr, bestimmen Sie (mit Begründung) die Wahrheiten von p, q, r .

Beweis 1: Verwenden Sie die Wahrheitstafel, um die eindeutige Lösung zu den Wahrheiten von p, q, r zu finden

$$\text{Beweis 2: } \underbrace{(\neg p \vee q)}_{A_1} \wedge \underbrace{(q \Rightarrow (\neg p \wedge \neg r))}_{A_2} \wedge \underbrace{(p \vee r)}_{A_3}$$

Beobachtung ①: A ist wahr
 $\Leftrightarrow A_1, A_2, A_3$ sind alle wahr

Beobachtung ②: A_2 ist nur wahr, wenn q falsch ist oder q und $(\neg p \wedge \neg r)$ beide wahr sind.

Fall 1: $q = f$

Da A_1 wahr ist, gilt $\neg p = w$, nämlich $p = f$

Da A_3 wahr ist, gilt $r = w$

$$\rightarrow \begin{cases} p = q = f \\ r = w \end{cases}$$

Fall 2: q und $(\neg p \wedge \neg r)$ sind beide wahr

$$\Rightarrow q = w, p = r = f \Rightarrow A_3 = f \quad \downarrow$$



Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien A und B Mengen und $f: A \rightarrow B$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen einander äquivalent sind.

- a) f ist injektiv.
- b) Für alle $X, Y \subseteq A$ gilt: $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
- c) Für alle $X \subseteq Y \subseteq A$ gilt: $f(Y \setminus X) = f(Y) \setminus f(X)$.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b).

Angenommen, dass f injektiv ist.

$\forall X, Y \subseteq A$:

$$\begin{aligned} f(X) \cap f(Y) &= (f(X \cap Y) \cup f(X \setminus Y)) \cap (f(X \cap Y) \cup f(Y \setminus X)) \\ &= f(X \cap Y) \cup \underbrace{(f(X \setminus Y) \cap f(Y \setminus X))}_M \end{aligned}$$

Wenn $X \setminus Y = \emptyset$ oder $Y \setminus X = \emptyset$, gilt $M = \emptyset$
 $\Rightarrow f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y)$

Wenn $X \setminus Y \neq \emptyset$ und $Y \setminus X \neq \emptyset$, gilt

$\forall a \in X \setminus Y, b \in Y \setminus X: f(a) \neq f(b)$, da f injektiv ist
 $\Rightarrow M = \emptyset \Rightarrow f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y)$

(b) $\Rightarrow$ (c).

Angenommen, dass (b) gilt.

$$\begin{aligned} \forall X \subseteq Y \subseteq A. \quad f(Y) \setminus f(X) &= (f(X) \cup f(Y \setminus X)) \setminus f(X) \\ &= f(Y \setminus X) \setminus f(X) \end{aligned}$$

Aus (b) folgt

$$\begin{aligned} f(Y \setminus X) \cap f(X) &= f((Y \setminus X) \cap X) = f(\emptyset) = \emptyset \\ \Rightarrow f(Y \setminus X) \setminus f(X) &= f(Y \setminus X) \\ \Rightarrow f(Y) \setminus f(X) &= f(Y \setminus X) \end{aligned}$$

(c) $\Rightarrow$ (a).

$\forall x, y \in A$ mit $x \neq y$: Gemäß (c) haben wir

$$f(\{x, y\}) \setminus f(\{y\}) = f(\{x, y\} \setminus \{y\}) = f(\{x\}) \neq \emptyset \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Aufgabe 4

Gegeben seien die Mengen A, B und C sowie Abbildungen $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ und $h: A \rightarrow A$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussagen:

a) $g \circ f$ ist bijektiv $\implies f$ und g sind bijektiv.

Die Aussage (a) ist im Allgemeinen falsch.

Gegenbeispiel: $A = C = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$

$$f: A \rightarrow B, x \mapsto f(x) := x + 0.1$$

$$g: B \rightarrow C, x \mapsto g(x) := \max\{x' \in \mathbb{Z} : x' \leq x\}$$

Dann gilt $g \circ f = \text{id}$, nämlich, dass $g \circ f$ bijektiv ist

Aber f ist nicht surjektiv und g ist nicht injektiv

(a') $g \circ f$ bijektiv $\implies f$ injektiv und g surjektiv

b) f ist injektiv und g ist surjektiv $\implies g \circ f$ ist surjektiv.

Falsch.

Gegenbeispiel: $A = \mathbb{N}$, $B = C = \mathbb{Z}$

$$f: A \rightarrow B, x \mapsto f(x) := x$$

$$g: B \rightarrow C, x \mapsto g(x) := x$$

$\implies f$ ist injektiv und g ist surjektiv

Aber $g \circ f$ ist nicht surjektiv

(b') f surjektiv und g surjektiv $\implies g \circ f$ surjektiv

c) $h \circ h = \text{id}_A \implies h$ ist bijektiv.

Beweis: injektiv: $\forall x, y \in A$ mit $x \neq y$: $h \circ h(x) = x \neq y = h \circ h(y)$
 $\implies h(h(x)) \neq h(h(y))$
 $\implies h(x) \neq h(y)$

surjektiv: $\forall x \in A$, $\exists h(x) \in A$: $h(h(x)) = h \circ h(x) = x$