

Lineare Algebra I

Wintersemester 2024/25

Übungsblatt 5

Abgabe bis spätestens zum 25.11.2024 um 15:30 Uhr

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe.

- a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in G$ gilt: $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$.
- b) Finden Sie eine Gruppe $(G, \circ)$ und Elemente $x, y \in G$ sodass $(x \circ y)^{-1} \neq x^{-1} \circ y^{-1}$.
- c) Sind $f, f' \in G$ Elemente, die für alle $g \in G$ die Gleichungen

$$f \circ g = g \quad \text{und} \quad g \circ f' = g$$

erfüllen, zeigen Sie, dass $f = f'$ das neutrale Element der Gruppe G ist.

Aufgabe 2

- a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.
- b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{x + \sqrt{2} \cdot y \mid x, y \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$$

mit den üblichen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Körper ist.

Aufgabe 3

Es sei die Menge $G := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gegeben. Weiter sei auf G die Verknüpfung $\star$ durch

$$a \star b := ab + a + b \quad \text{für } a, b \in G,$$

definiert.

- a) Zeigen Sie, dass $(G, \star)$ eine abelsche Gruppe ist.
- b) Lösen Sie in der Gruppe $(G, \star)$ die Gleichung: $3 \star x \star x = 15$.
- c) Ist $(\mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \star)$ eine Untergruppe von $(G, \star)$? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

- a) Stellen Sie (ohne Beweis) die folgenden Permutationen durch Transpositionen dar und berechnen Sie jeweils die Fehlstandszahl:

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Es sei

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_4.$$

Bestimmen Sie die von σ erzeugte Untergruppe von S_4 sowie $\sigma^n := \underbrace{\sigma \circ \dots \circ \sigma}_{n \text{ Faktoren}}$ wobei n das Geburtsjahr von Niels Henrik Abel ist.

Informationsveranstaltung zum Erasmus- und Übersee-Programm: Du hast Interesse ein Semester an einer ausländischen Universität zu studieren, eine andere Kultur besser kennenzulernen oder deine Sprachkenntnisse zu verbessern? Für dich besteht die Möglichkeit, ein oder zwei Semester an einer unserer Partneruniversitäten zu verbringen. Neugierig geworden?

Dann nimm doch bei der Informationsveranstaltung der Fakultät für Mathematik am 17.12.24 per ZOOM um 17:00 Uhr teil. Die Zugangsdaten findest du auf der Seite

<https://www.math.kit.edu/lehre/seite/erasmus/>

unter „Informationsveranstaltung“.

Abgabe der Lösungen bis zum 25.11.2024 um 15:30 Uhr auf **ILIAS im Abgabeportal Ihrer Tutoriumsgruppe** oder in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihrer Tutoriumsgruppe im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer** auf jedem Blatt. Jede Aufgabe wird mit **maximal 10 Punkten** bewertet.