

Sheet 6

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ist A, beziehungsweise C, invertierbar? Was sind gegebenenfalls die Inversen?

(a)

Wir haben aus der Vorlesung gelernt, dass eine Matrix genau dann invertierbar ist, wenn ihre ref die Einheitsmatrix ist, und dass wir mit dem Verfahren aus der Vorlesung ihre Inverse erhalten können.

$$A: \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 5 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Downarrow \quad z_2 := z_2 + z_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Downarrow \quad z_1 := \frac{1}{7} z_1, \quad z_2 := \frac{1}{6} z_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right)$$

$$\Downarrow \quad z_1 := z_1 - \frac{5}{7} z_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{42} & -\frac{5}{42} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow A \text{ ist invertierbar und } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{42} & -\frac{5}{42} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$C: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Downarrow \quad z_2 := z_2 - 4z_1, \quad z_3 := z_3 - 7z_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Downarrow \quad z_3 := z_3 - 2z_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow C$ ist nicht invertierbar

b) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist B , beziehungsweise D , invertierbar? Bestimmen Sie die Menge aller solchen (a, b, c) .

c)

$$D: \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Downarrow \quad z_2 := z_2 - cz_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Downarrow \quad z_1 := z_1 - az_2 - bz_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow D$ ist invertierbar für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid D \text{ ist invertierbar}\} = \mathbb{R}^3$

$$B: \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_1 := z_1 - bz_2} \begin{pmatrix} a-bc & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn $a-bc=0$, ist die $\text{rref}(B) \neq E$, d.h. B nicht invertierbar

$$\text{Wenn } a-bc \neq 0: \begin{pmatrix} a-bc & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \xrightarrow{z_1 := \frac{1}{a-bc} z_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \xrightarrow{z_2 := z_2 - cz_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{rref}(B) = E$$

$\Rightarrow B$ ist invertierbar

$$\Rightarrow \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid B \text{ invertierbar}\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a-bc \neq 0\}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und

$$T_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid a_{ij} = 0 \text{ für alle } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } i > j\}$$

die Menge der oberen Dreiecksmatrizen. Zeigen Sie:

- a) $T_n(\mathbb{K})$ ist ein Ring mit Eins bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen.

Bew.

Zu zeigen: 0. $T_n(\mathbb{K})$ ist unter $+$ und $\cdot$ geschlossen

1. $(T_n(\mathbb{K}), +)$ ist eine abelsche Gruppe

2. Die Multiplikation $\cdot$ ist assoziativ

3. $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$

4. $\exists$ ein neutrales Element für $\cdot$ (Einselement)

0. $\forall A, B \in T_n(\mathbb{K})$:

$$A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{K}^{n \times n} \text{ und } a_{ij}+b_{ij}=0 \text{ f\"ur alle } i>j$$

$$\Rightarrow A+B \in T_n(\mathbb{K})$$

$$A \cdot B = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{K}^{n \times n} \text{ und f\"ur alle } i>j \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} &= \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik} b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \cdot B \in T_n(\mathbb{K})$$

1. Assoziativ & Kommutativ.

Da $\mathbb{K}$ ein K\"orper ist, gilt f\"ur alle $A, B, C \in T_n(\mathbb{K})$

$$(A+B)+C = (a_{ij}+b_{ij}+c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = (a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = A+(B+C)$$

und

$$A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = (b_{ij}+a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = B+A$$

Nullelement:

$$\exists 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in T_n(\mathbb{K}), \text{ sodass } \forall A \in T_n(\mathbb{K}): A+0=0+A=A$$

Inverses Element:

$$\forall A \in T_n(\mathbb{K}), \exists (-A) := (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{K}^{n \times n} \text{ sodass}$$

$$A+(-A) = (-A)+A = 0.$$

Da $-a_{ij} = a_{ij} = 0$ f\"ur alle $i>j$, gilt $(-A) \in T_n(\mathbb{K})$

2. Dies folgt aus der Tatsache, dass die Matrizenmultiplikation

assoziativ ist.

3 Da $\mathbb{K}$ ein Körper ist, gilt

$$\begin{aligned}(A+B)C &= (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} C = \left(\sum_{k=1}^n (a_{ik}+b_{ik}) c_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} + \sum_{k=1}^n b_{ik} c_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} + \left(\sum_{k=1}^n b_{ik} c_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= AC + BC\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}A \cdot (B+C) &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot (b_{kj}+c_{kj}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= AB + AC\end{aligned}$$

$$4. \exists E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in T_n(\mathbb{K}), \forall A \in T_n(\mathbb{K}): AE = EA = A$$

b) Seien $A, B \in T_n(\mathbb{K})$ und $C = AB$. Zeigen Sie, dass $\forall k \in \{1, \dots, n\}: a_{kk}b_{kk} = c_{kk}$.

$$C = AB = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}:$

$$\begin{aligned}c_{ii} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{ki} + \sum_{k=1}^{i+1} a_{ik} b_{ki} + a_{ii} b_{ii} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{ki} + \sum_{k=1}^{i+1} a_{ik} \cdot 0 + a_{ii} b_{ii} \\ &= a_{ii} b_{ii}\end{aligned}$$

c) Sei $1 \leq i < j \leq n$. Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, wobei B aus A durch die Zeilenoperation $\text{Zeile}_i := \text{Zeile}_i + d \cdot \text{Zeile}_j$ erhalten wird. Finden Sie eine Matrix $C \in T_n(\mathbb{K})$, sodass $B = C \cdot A$.

$$B = A + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{aj_1} & d_{aj_2} & \dots & d_{aj_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{A'} \rightarrow i\text{-te Zeile}$$

$$A' = C' \cdot A, \text{ wobei } C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Also } C'_{ij} = d, \text{ die anderen sind } 0)$$

$$\Rightarrow B = A + C' \cdot A = (E + C') A$$

$$\text{Da } E, C' \in T_n(K), \text{ gilt } E + C' \in T_n(K)$$

$$\Rightarrow C = E + C'$$

Aufgabe 3

- a) Für einen Ring R mit Eins wird die Teilmenge der bezüglich der Multiplikation invertierbaren Elemente mit R^* notiert.

Es sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $K[x]^* = K^*$ gilt.

Bew.

Es folgt aus der Definition von $K[x]$, dass $K \subseteq K[x]$

$$\Rightarrow K^* \subseteq K^*[x]$$

Es bleibt zu zeigen, dass $K^*[x] \subseteq K^*$

Sei $p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$ ein beliebiges Element von $K^*[x]$

Dann gibt es $q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i \in K[x]$ sodass $p(x) \cdot q(x) = 1$

Beachten Sie, dass $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ gelten muss, sonst ist $p(x) \cdot q(x)$ ein Polynom, das eine Potenz von x enthält $\hookrightarrow$

Dann haben wir

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^k b_i a_i x^i = 1$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

$$\Rightarrow p(x) = a_0, \text{ wobei } a_0 \in \mathbb{K} \text{ und } a_0 \neq 0$$

sonst $p(x) = 0 \notin \mathbb{K}^*[x]$

Da $\mathbb{K}$ ein Körper ist, gilt $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

$$\Rightarrow p(x) \in \mathbb{K}^*$$

$$\Rightarrow \mathbb{K}^*[x] \subseteq \mathbb{K}^*$$

b) Gegeben sei die Abbildung

$$\Phi: \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}, \quad \sum_{i=0}^n a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^n a_i.$$

Stimmt es, dass $\forall A, B \in \mathbb{K}[x] : \Phi(A \cdot B) = \Phi(A) \cdot \Phi(B)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\forall A, B \in \mathbb{K}[x] \text{ mit } A = \sum_{i=0}^k a_i x^i \text{ und } B = \sum_{j=0}^m b_j x^j$$

Es gilt

$$A \cdot B = \sum_{l=0}^{k+m} c_l x^l, \text{ wobei } c_l = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq m \\ i+j=l}} a_i b_j$$

Denn um die Potenz x^l zu erhalten, müssen wir $a_i x^i$ und $b_j x^j$ mit $i+j=l$ multiplizieren. Die Summe aller dieser Kombinationen bildet den entsprechenden Koeffizienten von x^l .

$$\Rightarrow \Phi(A \cdot B) = \sum_{l=0}^{k+m} c_l = \sum_{l=0}^{k+m} \sum_{\substack{0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq m \\ i+j=l}} a_i b_j = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq m}} a_i b_j$$

$$\begin{aligned} \Phi(A) \cdot \Phi(B) &= \sum_{i=0}^k a_i \cdot \sum_{j=0}^m b_j \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq m}} a_i b_j = \Phi(A \cdot B) \end{aligned}$$