

# Sheet 07

## Aufgabe 1 (10 Punkte)

- a) Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ . Die Menge  $\mathbb{K}^n$  wird jetzt mit folgender Addition und Multiplikation verknüpft:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n & \cdot : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ \vdots \\ x_n \cdot y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass  $\mathbb{K}^n$  bezüglich obiger Addition und Multiplikation genau dann ein Körper ist, wenn  $n = 1$  gilt.

Beh.  $n=1 \iff \mathbb{K}^n$  ein Körper

Bew.

$\Rightarrow$ : Es folgt aus  $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}$ .

$\Leftarrow$ : Annahme, dass  $n > 1$ . Seien  $0$  das Nullelement und  $1$  das Einselement von  $\mathbb{K}$ . Da  $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$  ein Körper ist, gilt

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \exists x^{-1} \in \mathbb{K}^n : x \cdot x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . Dann  $x \in \mathbb{K}^n \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  aber es gibt kein  $x^{-1}$   $\hookrightarrow$

- b) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Beweisen Sie, dass  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = ax + by\}$  mit der Addition  $+$  gegeben durch

$$(x, y, z) + (x', y', z') := (x + x', y + y', z + z')$$

und der Skalarmultiplikation  $\cdot$  gegeben durch

$$d \cdot (x, y, z) := (dx, dy, dz)$$

ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist.

Sei  $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = ax + by\}$ .

Zu zeigen: 1.  $V$  ist unter der Addition und der Skalarmultiplikation geschlossen

1.  $(V, +)$  ist eine abelsche Gruppe.

2.  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$ .

$$(a) 1 \cdot u = u \quad (b) \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$$

$$(c) (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \quad (d) \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$$

## Aufgabe 2

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $F \subseteq \mathbb{K}$  ein Körper bezüglich der gleichen Verknüpfungen.

a) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{K}$  ein  $F$ -Vektorraum ist.

Trivial. Alle Eigenschaften folgen aus der Tatsache dass  $\mathbb{K}$  ein Körper ist und  $F \subseteq \mathbb{K}$ .

b) Stimmt es immer, dass  $F$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist?

Nein.  $\mathbb{Q}$  ist kein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, weil die Skalarmultiplikation nicht wohl-definiert.

c) Beweisen Sie, dass die Vektoren  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$  des  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums  $\mathbb{R}$  linear unabhängig sind.

Seien  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  mit  $a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2} + c \cdot \sqrt{3} = 0$

Zu zeigen:  $a = b = c = 0$

Fall 1.  $b = c = 0$   
 $\Rightarrow a = 0$

Fall 2:  $b = 0, c \neq 0$   
 $\Rightarrow \frac{a}{c} = -\sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \quad \hookrightarrow$

Fall 3:  $b \neq 0, c = 0$   
 $\Rightarrow \frac{a}{b} = -\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \hookrightarrow$

Fall 4:  $b, c \neq 0$   
 $\Rightarrow b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$   
 $\Rightarrow bc\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$   
 $\Rightarrow \sqrt{6} \in \mathbb{Q} \quad \hookrightarrow$

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Seien  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  ein Körper und  $\text{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$  die Menge aller Abbildungen  $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ .

- a) Zeigen Sie, dass  $\text{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$  mit der Verknüpfung  $+: \text{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \times \text{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$  gegeben durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{K}$$

und der Skalarmultiplikation  $\cdot: \mathbb{K} \times \text{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$  gegeben durch

$$(a \cdot f)(x) := a \cdot f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{K}$$

ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist.

Sei  $V := \text{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ .

Zu zeigen: 1.  $V$  ist unter der Addition und der Skalarmultiplikation geschlossen

1.  $(V, +)$  ist eine abelsche Gruppe.

2.  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall f, g \in V$ .

(a)  $1 \cdot f = f$     (b)  $\lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda \cdot \mu) \cdot f$

(c)  $(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$     (d)  $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$

1. trivial

1. Assoziativ & Kommutativ:  $\forall f, g, h \in V, \forall x \in \mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned} ((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x) + h(x) \\ &= f(x) + g(x) + h(x) \\ &= f(x) + (g+h)(x) \\ &= (f+(g+h))(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (f+g)+h = f+(g+h)$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$$

$$\Rightarrow f+g = g+f$$

Neutral: Sei  $e: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto e(x) = 0$

Es gilt  $e \in V$  und  $\forall f \in V: f+e = e+f = f$

Inverse:  $\forall f \in V, \exists -f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto (-f)(x) := -f(x)$

$$\Rightarrow -f \in V \text{ und } f+(-f) = (-f)+f = e$$

2.  $\forall \lambda, \mu \in K, \forall f, g \in V, \forall x \in K.$

(a)  $(1 \cdot f)(x) = f(x) \Rightarrow 1 \cdot f = f$

(b)  $(\lambda \cdot (\mu \cdot f))(x) = \lambda \cdot \mu \cdot f(x) = (\lambda \mu) \cdot f(x) = ((\lambda \mu) \cdot f)(x)$   
 $\Rightarrow \lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda \mu) \cdot f$

(c)  $((\lambda + \mu) \cdot f)(x) = (\lambda + \mu) f(x) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(x) = (\lambda \cdot f)(x) + (\mu \cdot f)(x)$   
 $\Rightarrow (\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$

(d)  $(\lambda \cdot (f + g))(x) = \lambda \cdot (f + g)(x) = \lambda \cdot (f(x) + g(x))$   
 $= \lambda f(x) + \lambda g(x)$   
 $= (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x)$   
 $\Rightarrow \lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$

b) Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  sei eine Abbildung  $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f_a(x) = \begin{cases} (x - a)^3 & \text{falls } x < a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren  $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$  des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  linear unabhängig sind.

Zu zeigen: Jede endliche Teilmenge von  $\{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$  ist linear unabhängig

Sei  $\{f_{a_1}, \dots, f_{a_k}\}$  eine beliebige endliche Teilmenge mit  
 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k.$

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  sodass

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f_{a_i} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: \sum_{i=1}^k \lambda_i f_{a_i}(x) = 0$$

Für  $x \in [a_{k-1}, a_k)$  gilt  $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_{a_i}(x) = \lambda_k f_{a_k}(x)$   
 $= \lambda_k (x - a_k)^3 = 0$   
 $\Rightarrow \lambda_k = 0$

Ebenso für  $x \in [a_{k-2}, a_{k-1})$  gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k \lambda_i f_{a_i}(x) &= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i f_{a_i}(x) \\ &= \lambda_{k-1} f_{a_{k-1}}(x) \\ &= \lambda_{k-1} (x - a_{k-1})^3 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_{k-1} &= 0\end{aligned}$$

⋮

Weiter so erhalten wir  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$

$\Rightarrow \{f_{a_1}, \dots, f_{a_k}\}$  ist linear unabhängig

#### Aufgabe 4

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times 7}$  eine Matrix mit  $n \geq 5$ , deren reduzierte Normform die folgende ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seien  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_7$  die Spaltenvektoren der Matrix  $A$ . Listen Sie alle 3-elementigen Teilmengen von  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_7\}$  auf, die linear unabhängig sind.

Beh. Die elementare Operationen ändern die lineare Abhängigkeit der Spaltenvektoren nicht.

Bew.

Seien  $A := \begin{pmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$  und  $B := \begin{pmatrix} | & | & & | \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ,

wobei  $B$  aus  $A$  durch die Operation  $\underline{z_p = \alpha z_p + \beta z_q}$  erhalten wird.  
 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$

Zu zeigen:  $\forall I \subseteq \{1, \dots, n\} \cdot (x_k)_{k \in I}$  und  $(y_k)_{k \in I}$  haben dieselbe lineare Abhängigkeit.

$\Rightarrow$ : Annahme, dass  $\sum_{k \in I} \lambda_k x_k = 0$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{p\}: \sum_{k \in I} \lambda_k a_{ik} = \sum_{k \in I} \lambda_k b_{ik} = 0$$

$$\text{und } \sum_{k \in I} \lambda_k b_{pk} = \sum_{k \in I} \lambda_k (\alpha a_{pk} + \beta a_{qk}) = \alpha \sum_{k \in I} \lambda_k a_{pk} + \beta \sum_{k \in I} \lambda_k a_{qk} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in I} \lambda_k y_k = 0$$

$\Leftarrow$ : Annahme, dass  $\sum_{k \in I} \lambda_k y_k = 0$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{p\}: \sum_{k \in I} \lambda_k b_{ik} = \sum_{k \in I} \lambda_k a_{ik} = 0$$

$$\text{und } \sum_{k \in I} \lambda_k b_{pk} = \sum_{k \in I} \lambda_k (\alpha a_{pk} + \beta a_{qk}) = \alpha \sum_{k \in I} \lambda_k a_{pk} + \beta \underbrace{\sum_{k \in I} \lambda_k a_{qk}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in I} \lambda_k a_{pk} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k \in I} \lambda_k b_{pk} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in I} \lambda_k x_k = 0$$



$$\Rightarrow \{a_1, a_3, a_5\}$$

$$\{a_1, a_3, a_6\}$$

$$\{a_2, a_3, a_5\}$$

$$\{a_2, a_3, a_6\}$$