**Institut für Algebra und Geometrie**
Prof. Dr. Maria Axenovich
M. Sc. Dingyuan Liu

**Lineare Algebra I** **Wintersemester 2024/25**

**Übungsblatt 8** **Abgabe bis spätestens zum 16.12.2024 um 15:30 Uhr**

---

**Aufgabe 1** *(10 Punkte)*

a) Gegeben seien eine reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine maximale linear unabhängige Teilmenge von $\{v_1, v_2, v_3\}$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{3x - x^5,\ 4x + x^3,\ 5x - x^5 - x^6\}$$

in $\mathbb{Q}[x]$ linear unabhängig ist.

Erweitern Sie diese Menge zu einer Basis von $\{f \in \mathbb{Q}[x] \mid \deg f \leq 6\}$.

**Aufgabe 2**

Zeigen Sie:

a) $\mathbb{C}$ ist ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) $\mathbb{R}$ ist <u>kein</u> endlich erzeugter $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

**Aufgabe 3** *(10 Punkte)*

Es seien $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum sowie $M_1$ und $M_2$ Teilmengen von $V$. Zeigen Sie:

a) $\operatorname{Span}(M_1 \cap M_2) \subseteq \operatorname{Span}(M_1) \cap \operatorname{Span}(M_2)$.

b) $\operatorname{Span}(M_1) \cup \operatorname{Span}(M_2) \subseteq \operatorname{Span}(M_1 \cup M_2)$.

c) In a) und b) gilt im Allgemeinen keine Gleichheit. (Geben Sie jeweils ein Beispiel.)

**Aufgabe 4**

Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

a) Zeigen Sie, dass eine Menge $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ von Vektoren linear unabhängig (bzw. linear abhängig) bleibt, wenn man elementare Operationen auf $v_1, \ldots, v_n$ ausführt.

b) Beweisen Sie, dass eine Teilmenge $B \subseteq V$ genau dann eine Basis ist, wenn $B$ maximal linear unabhängig ist.

Abgabe der Lösungen bis zum 16.12.2024 um 15:30 Uhr auf **ILIAS im Abgabeportal Ihrer Tutoriumsgruppe** oder in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihrers Tutoriumsgruppe im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer** auf jedem Blatt. Jede Aufgabe wird mit **maximal 10 Punkten** bewertet.