Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Maria Axenovich
M. Sc. Dingyuan Liu

Lineare Algebra I **Wintersemester 2024/25**

Übungsblatt 9 **Abgabe bis spätestens zum 23.12.2024 um 15:30 Uhr**

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

a) Es seien im $\mathbb{R}^4$ die Basen

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben.

Bestimmen Sie die Übergangsmatrix des Basiswechsels von B_1 nach B_2 und die Übergangsmatrix von B_2 nach B_1.

b) Für den Vektorraum der Polynome in $\mathbb{R}[x]$ vom Grad ≤ 3 seien die folgenden drei Basen gegeben:

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{1 - x^2 + x^3,\ x - x^2,\ 1 - x + x^2,\ 1 - x\}, \\ B_2 &:= \{1 - x^3,\ 1 - x^2,\ 1 - x,\ 1 + x^2 - x^3\}, \\ B_3 &:= \{1, x, x^2, x^3\}. \end{aligned}$$

Geben Sie die folgenden Komponentenvektoren in $\mathbb{R}^4$ an:

$$\begin{aligned} &\Theta_{B_1}(b) \text{ für alle } b \in B_1, \\ &\Theta_{B_3}(b) \text{ für alle } b \in B_1, \\ &\Theta_{B_3}(b) \text{ für alle } b \in B_2, \\ &\Theta_{B_1}(b) \text{ für alle } b \in B_2, \\ &\Theta_{B_2}(b) \text{ für alle } b \in B_1. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie außerdem die Übergangsmatrix des Basiswechsels von B_2 nach B_1.

Aufgabe 2

Sind $U_0, \ldots, U_n$ Unterräume eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes V mit der Eigenschaft, dass

$$U_0 \subseteq U_1 \subseteq \cdots \subseteq U_n,$$

so heißt $(U_0, \ldots, U_n)$ eine *Fahne* der Länge n in V. Die Fahne heißt *echt*, falls

$$U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \cdots \subsetneq U_n$$

gilt. Zeigen Sie die folgende Aussage für $n \in \mathbb{N}$: Es gilt genau dann $\dim(V) = n$, wenn jede echte Fahne in V eine Länge kleiner gleich n hat und es eine echte Fahne der Länge n gibt.

Aufgabe 3

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist
$$U := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AX = XB\}$$
ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Sind speziell
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix},$$
so gilt für den Untervektorraum U aus Teil a)
$$U = \{0\} \iff \{a_1, a_4\} \cap \{b_1, b_4\} = \emptyset.$$

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*

Seien U_1, U_2 Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$ definiert als
$$U_1 := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad U_2 := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie zu $U_1, U_2, U_1 \cap U_2, U_1 + U_2$ je eine Basis und die Dimension. Bestimmen Sie außerdem einen Untervektorraum W des $\mathbb{R}^4$, sodass $U_1 \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Abgabe der Lösungen bis zum 23.12.2024 um 15:30 Uhr auf **ILIAS im Abgabeportal Ihrer Tutoriumsgruppe** oder in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihrers Tutoriumsgruppe im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer** auf jedem Blatt. Jede Aufgabe wird mit **maximal 10 Punkten** bewertet.