Sheet 09

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

a) Es seien im $\mathbb{R}^4$ die Basen

$$B_1 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\alpha_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\alpha_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\alpha_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\alpha_4} \right\} \quad \text{und} \quad B_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\beta_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\beta_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\beta_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\beta_4} \right\}$$

gegeben.

Bestimmen Sie die Übergangsmatrix des Basiswechsels von B_1 nach B_2 und die Übergangsmatrix von B_2 nach B_1.

Sei A die Übergangsmatrix von B_1 nach B_2

Da

$$\alpha_1 = -2\cdot\beta_1 + 2\cdot\beta_2 + 0\cdot\beta_3 + 1\cdot\beta_4$$
$$\alpha_2 = 0\,\beta_1 + 1\,\beta_2 + (-1)\cdot\beta_3 + 0\cdot\beta_4$$
$$\alpha_3 = (-1)\cdot\beta_1 + 0\cdot\beta_2 + 1\cdot\beta_3 + 1\cdot\beta_4$$
$$\alpha_4 = 0\cdot\beta_1 + 0\cdot\beta_2 + 1\cdot\beta_3 + 0\,\beta_4$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \hline \beta_1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ \beta_2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_3 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ \beta_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 7.19 ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix von B_2 nach B_1.

b) Für den Vektorraum der Polynome in $\mathbb{R}[x]$ vom Grad ≤ 3 seien die folgenden drei Basen gegeben:

$$B_1 := \{1 - x^2 + x^3,\ x - x^2,\ 1 - x + x^2,\ 1 - x\},$$
$$B_2 := \{1 - x^3,\ 1 - x^2,\ 1 - x,\ 1 + x^2 - x^3\},$$
$$B_3 := \{1, x, x^2, x^3\}.$$

Geben Sie die folgenden Komponentenvektoren in $\mathbb{R}^4$ an:

$$\Theta_{B_1}(b) \text{ für alle } b \in B_1,$$
$$\Theta_{B_3}(b) \text{ für alle } b \in B_1,$$
$$\Theta_{B_3}(b) \text{ für alle } b \in B_2,$$
$$\Theta_{B_1}(b) \text{ für alle } b \in B_2,$$
$$\Theta_{B_2}(b) \text{ für alle } b \in B_1.$$

Bestimmen Sie außerdem die Übergangsmatrix des Basiswechsels von B_2 nach B_1.

$$B_1 = \{ \underbrace{1 - x^2 + x^3}_{\alpha_1}, \underbrace{x - x^2}_{\alpha_2}, \underbrace{1 - x + x^2}_{\alpha_3}, \underbrace{1 - x}_{\alpha_4} \}$$

$$B_2 = \{ \underbrace{1 - x^3}_{\beta_1}, \underbrace{1 - x^2}_{\beta_2}, \underbrace{1 - x}_{\beta_3}, \underbrace{1 + x^2 - x^3}_{\beta_4} \}$$

$$B_3 = \{ \underbrace{1}_{e_1}, \underbrace{x}_{e_2}, \underbrace{x^2}_{e_3}, \underbrace{x^3}_{e_4} \}$$

(1) $\Theta_{B_1}(\alpha_1) = (1, 0, 0, 0)$

$\Theta_{B_1}(\alpha_2) = (0, 1, 0, 0)$

$\Theta_{B_1}(\alpha_3) = (0, 0, 1, 0)$

$\Theta_{B_1}(\alpha_4) = (0, 0, 0, 1)$

(2) $\Theta_{B_3}(\alpha_1) = (1, 0, -1, 1)$

$\Theta_{B_3}(\alpha_2) = (0, 1, -1, 0)$

$\Theta_{B_3}(\alpha_3) = (1, -1, 1, 0)$

$$\Theta_{B_3}(\alpha_4) = (1, -1, 0, 0)$$

(3) $$\Theta_{B_3}(\beta_1) = (1, 0, -1, 0)$$
$$\Theta_{B_3}(\beta_2) = (1, -1, 0, 0)$$
$$\Theta_{B_3}(\beta_3) = (1, -1, 0, 0)$$
$$\Theta_{B_3}(\beta_4) = (1, 0, 1, -1)$$

(4) $$\beta_1 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$
$$\Longrightarrow \Theta_{B_1}(\beta_1) = (-1, 2, 1, 1)$$
$$\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_4$$
$$\Longrightarrow \Theta_{B_1}(\beta_2) = (0, 1, 0, 1)$$
$$\beta_3 = \alpha_4$$
$$\Longrightarrow \Theta_{B_1}(\beta_3) = (0, 0, 0, 1)$$
$$\beta_4 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$$
$$\Longrightarrow \Theta_{B_1}(\beta_4) = (-1, 2, 2, 0)$$

Und die Übergangsmatrix von B_2 nach B_1 ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(5) Da die Übergangsmatrix von B_1 nach B_2

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist, gilt dann

$$\theta_{B_2}(\alpha_1) = (-2, 2, 0, 1)$$
$$\theta_{B_2}(\alpha_2) = (0, 1, -1, 0)$$
$$\theta_{B_2}(\alpha_3) = (-1, 0, 1, 1)$$
$$\theta_{B_2}(\alpha_4) = (0, 0, 1, 0)$$

Aufgabe 2

Sind $U_0, \ldots, U_n$ Unterräume eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes V mit der Eigenschaft, dass

$$U_0 \subseteq U_1 \subseteq \cdots \subseteq U_n,$$

so heißt $(U_0, \ldots, U_n)$ eine *Fahne* der Länge n in V. Die Fahne heißt *echt*, falls

$$U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \cdots \subsetneq U_n$$

gilt. Zeigen Sie die folgende Aussage für $n \in \mathbb{N}$: Es gilt genau dann $\dim(V) = n$, wenn jede echte Fahne in V eine Länge kleiner gleich n hat und es eine echte Fahne der Länge n gibt.

$\Longrightarrow$

Annahme, dass $\dim(V) = n$.

Wir zeigen zuerst dass $\forall$ Unterräumen $U, W \subseteq V$:

$$U \subsetneq W \Longrightarrow \dim(U) < \dim(V)$$

Sei $B \subseteq U$ eine Basis von U, nämlich, $\dim(U) = |B|$

Falls B eine maximale lineare unabhängige Teilmenge von W ist, ist B also eine Basis von W, d.h.

$$U = W \ \lightning$$

Deshalb $\exists\, B' \subseteq W$ sodass $B \subsetneq B'$ und B' linear unabhängig ist, d.h. $\dim(W) \geq |B'| > |B| = \dim(U)$.

Sei jetzt $(U_0, \dots, U_m)$ eine echte Fahne.

Dann haben wir

$$0 \leq \dim(U_0) < \dim(U_0) < \dim(U_1) < \dots < \dim(U_m) \leq n$$

$$\Longrightarrow m \leq n$$

Außerdem sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V. Dann ist $(U_0, \dots, U_n)$ mit $U_0 = \{0\}$ und

$$U_i = \operatorname{Span}(b_1, \dots, b_i) \text{ für alle } 1 \leq i \leq n$$

eine echte Fahne der Länge n

$\Longleftarrow$: Zuerst stellen wir fest, dass V endlichdimensional sein muss. Andernfalls können wir mit der obigen Konstruktion eine unendlich lange Fahne erhalten. (Widerspruch ↯)

Sei $(U_0, U_1, \dots, U_n)$ eine längste echte Fahne.

Es muss gelten, dass $U_0 = \{0\}$ und $U_n = V$, sonst können wir einfach diese Fahne verlängern.

Annahme, dass $\exists i \in \{1, \dots, n\}: \dim(U_i) \geq \dim(U_{i-1}) + 2$.

Sei $B_{i-1} \subseteq B_i$, wobei B_{i-1} eine Basis von U_{i-1} ist und B_i eine Basis von U_i ist. Da $|B_i| \geq |B_{i-1}| + 2$, gibt es ein B' mit $B_{i-1} \subsetneq B' \subsetneq B_i$. Sei $U' = \operatorname{Span}(B')$, dann ist $(U_0, \dots, U_{i-1}, U', U_i, \dots, U_n)$ eine längere echte Fahne. ↯

Deswegen haben wir

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: \dim(U_i) = \dim(U_{i-1}) + 1.$$

$$\Longrightarrow \dim(V) = \dim(U_n) = n$$

Aufgabe 3

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist

$$U := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AX = XB\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Zu zeigen: 1. $U \neq \emptyset$

2. $\forall X, Y \in U, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha X + \beta Y \in U$

1. Da $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$, gilt $U \neq \emptyset$

2. $$\begin{aligned} A(\alpha X + \beta Y) &= A\cdot(\alpha X) + A\cdot(\beta Y) \\ &= \alpha(AX) + \beta(AY) \\ &= \alpha(XB) + \beta(YB) \\ &= (\alpha X)B + (\beta Y)B \\ &= (\alpha X + \beta Y)B \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \alpha X + \beta Y \in U$

b) Sind speziell

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix},$$

so gilt für den Untervektorraum U aus Teil a)

$$U = \{0\} \iff \{a_1, a_4\} \cap \{b_1, b_4\} = \emptyset.$$

$\Longrightarrow$: Sei $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$AX = \begin{pmatrix} a_1x_1 & a_1x_2 \\ a_3x_1 + a_4x_3 & a_3x_2 + a_4x_4 \end{pmatrix}$$

$$XB = \begin{pmatrix} b_1x_1 & b_2x_1 + b_4x_2 \\ b_1x_3 & b_2x_3 + b_4x_4 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$AX = XB \iff \begin{cases} (a_1-b_1)\, x_1 = 0 \\ (a_1-b_4)\, x_2 - b_2 x_1 = 0 \\ (a_4-b_1)\, x_3 + a_3 x_1 = 0 \\ (a_4-b_4)\, x_4 + a_3 x_2 - b_2 x_3 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Denken Sie daran, dass die Dimension eines Lösungsraums eines homogenes LGS gleich die Anzahl der freien Variablen ist.

Da $U = \{0\}$, ist $(0,0,0,0)$ die einzige Lösung von $(*)$.
Das bedeutet, $\nexists$ freie Variable in $(*)$.

Dann haben wir

(1) $a_1 - b_1 \neq 0$, sonst ist x_1 eine freie Variable
($\text{also } x_1 = 0$)

(2) $a_1 - b_4 \neq 0$, sonst ist x_2 eine freie Variable
($\text{also } x_2 = 0$)

(3) $a_4 - b_1 \neq 0$, sonst ist x_3 eine freie Variable
($\text{also } x_3 = 0$)

(4) $a_4 - b_4 \neq 0$, sonst ist x_4 eine freie Variable

$$\Longrightarrow \quad \{a_1, a_4\} \cap \{b_1, b_4\} = \emptyset$$

$\Longleftarrow$:

$$(*) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1-b_1 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & a_1-b_4 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & a_4-b_1 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & a_4-b_4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Wenn $\{a_1, a_4\} \cap \{b_1, b_4\} = \emptyset$, kann man zeigen, dass $rref(A) =$ Einheitsmatrix

$\Longrightarrow$ Der Lösungsraum von $(*)$ hat die Dimension 0

$\Longrightarrow U = \{0\}$

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*

Seien U_1, U_2 Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$ definiert als

$$U_1 := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}3\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix}\right), \qquad U_2 := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie zu $U_1, U_2, U_1 \cap U_2, U_1 + U_2$ je eine Basis und die Dimension. Bestimmen Sie außerdem einen Untervektorraum W des $\mathbb{R}^4$, sodass $U_1 \oplus W = \mathbb{R}^4$.

U_1:
$$\begin{pmatrix}3&3&2\\2&3&1\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \; Z_1 := \tfrac{1}{3}Z_1,\quad Z_2 := Z_2 - 2Z_1,\quad Z_3 := Z_3 - 2Z_1$$

$$\begin{pmatrix}1&1&\frac{2}{3}\\0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&\frac{2}{3}\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \; Z_4 := Z_4 - Z_1 - \tfrac{1}{2}Z_3,\quad Z_3 := \tfrac{3}{2}Z_3,\quad Z_1 := Z_1 - Z_2 - Z_3,\quad Z_2 := Z_2 + \tfrac{1}{3}Z_3$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow B(U_1) = \left\{\begin{pmatrix}3\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ und } \dim(U_1) = 3$$

U_2:

$$\mathrm{rref}\left(\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&2\\4&2&0\\0&3&2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{B}(U_2)=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix}\right\},\quad \dim(U_2)=2$$

U_1+U_2:

$$\mathrm{rref}\left(\left(\underbrace{\begin{matrix}3&3&2\\2&3&1\\2&2&2\\1&1&1\end{matrix}}_{U_1}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1&2&1\\0&3&2\\4&2&0\\0&3&2\end{matrix}}_{U_2}\right)\right)$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-6&-4\\0&1&0&0&3&2\\0&0&1&0&6&4\\0&0&0&1&-1&-1\end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{B}(U_1+U_2)=\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\4\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim(U_1+U_2)=4$$

$U_1\cap U_2$:

Da $\dim(U_1+U_2)=\dim(U_1)+\dim(U_2)-\dim(U_1\cap U_2)$, gilt $\dim(U_1\cap U_2)=3+2-4=1$

Das heißt, jeder nichtnull Vektor in $U_1\cap U_2$ bildet eine Basis von $U_1\cap U_2$.

Weil $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\\2\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix}\in U_1$

und $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix} \in U_2$,

haben wir $B(U_1 \cap U_2) = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$

W: Wir haben schon

$$B(U_1) = \left\{ \begin{pmatrix}3\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$$

und

$$B(U_1 + U_2) = \left\{ \begin{pmatrix}3\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\4\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ Sei $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\4\\0\end{pmatrix} \right)$, dann gilt

$$U_1 \cap W = \{0\}$$

und $\dim(U_1 + W) = \dim(U_1 + U_2) = 4$

$$\Rightarrow U_1 \oplus W = \mathbb{R}^4$$