Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Maria Axenovich
M. Sc. Dingyuan Liu

Lineare Algebra I **Wintersemester 2024/25**

Übungsblatt 10 **Abgabe bis spätestens zum 13.01.2025 um 15:30 Uhr**

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

Seien $A \in \mathbb{K}^{p\times q}$ und $B \in \mathbb{K}^{q\times r}$, wobei $p, q, r \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K}$ ein Körper ist.
Zeigen Sie, dass $\mathrm{Rg}(AB) \leq \min\{\mathrm{Rg}(A), \mathrm{Rg}(B)\}$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie den Spaltenraum von AB.

Aufgabe 2

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei der Untervektorraum

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

gegeben, womit der Faktorraum $\mathbb{R}^3/U$ gebildet werde.

a) Zeichnen Sie für die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix}0\\8\\15\end{pmatrix}$$

die Äquivalenzklassen $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ und $\widetilde{3x+y}$.

b) Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^3/U$.

c) Stellen Sie die Vektoren

$$\widetilde{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}, \quad \widetilde{\begin{pmatrix}0\\8\\15\end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^3/U$$

bezüglich der Basis B dar. Sind diese beiden Vektoren linear unabhängig?

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

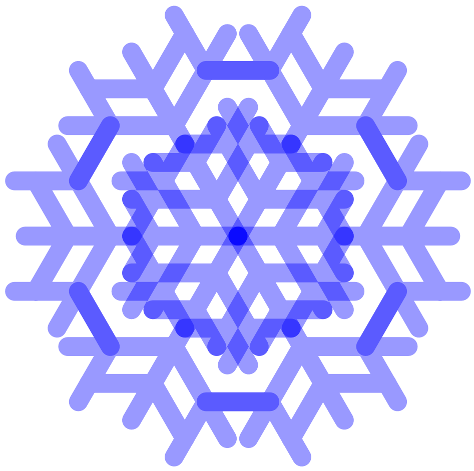
a) Jede lineare Abbildung ist bijektiv.

b) Jede bijektive Abbildung zwischen Vektorräumen ist linear.

c) Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear und gilt $f \circ f = 0$, so ist f die Nullabbildung (d.h. $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$).

Aufgabe 4

Seien V und W zwei endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann bijektive ist, wenn das Bild einer Basis von V auch eine Basis von W bildet.



Das LA-Team wünscht erholsame Feiertage und einen guten Jahreswechsel!

Abgabe der Lösungen bis zum 13.01.2025 um 15:30 Uhr auf **ILIAS im Abgabeportal Ihrer Tutoriumsgruppe** oder in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihrers Tutoriumsgruppe im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer** auf jedem Blatt. Jede Aufgabe wird mit **maximal 10 Punkten** bewertet.