

Sheet 10

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Seien $A \in \mathbb{K}^{p \times q}$ und $B \in \mathbb{K}^{q \times r}$, wobei $p, q, r \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K}$ ein Körper ist.

Zeigen Sie, dass $\text{Rg}(AB) \leq \min \{ \text{Rg}(A), \text{Rg}(B) \}$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie den Spaltenraum von AB .

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}, \quad B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq r}}$$

$$\Rightarrow AB = \left(\sum_{k=1}^q a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c} \sum_{k=1}^q b_{k1} \bar{a}_k & \sum_{k=1}^q b_{k2} \bar{a}_k & \dots & \sum_{k=1}^q b_{kr} \bar{a}_k \\ \hline \end{array} \right)$$

wobei $\bar{a}_k$ der k -te Spaltenvektor von A ist

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Spaltenraum}(AB) &\subseteq \text{Span}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_q) \\ &= \text{Spaltenraum}(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Rg}(AB) &= \dim(\text{SR}(AB)) \\ &\leq \dim(\text{SR}(A)) = \text{Rg}(A) \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\text{Rg}(AB) \leq \text{Rg}(B)$

Das folgt aus

$$\begin{aligned} \text{Rg}(AB) &= \text{Rg}((AB)^T) = \text{Rg}(B^T A^T) \\ &\leq \text{Rg}(B^T) = \text{Rg}(B) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Im $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei der Untervektorraum

$$U = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben, womit der Faktorraum $\mathbb{R}^3/U$ gebildet werde.

a) Zeichnen Sie für die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

die Äquivalenzklassen $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ und $\widetilde{3x+y}$.

$$\tilde{x} = \left\{ (1, 2, 3) + k(1, 1, 1) \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

= die Gerade durch $(1, 2, 3)$ mit Steigung $(1, 1, 1)$

Ebenso haben wir

$\tilde{y}$ = die Gerade durch $(0, 8, 15)$ mit Steigung $(1, 1, 1)$

$\widetilde{3x+y}$ = die Gerade durch $(3, 14, 24)$ mit Steigung $(1, 1, 1)$

b) Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^3/U$.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bildet eine Basis von $\mathbb{R}^3$

und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von U

$\Rightarrow \left\{ \widetilde{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \widetilde{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$ bildet eine Basis von $\mathbb{R}^3/U$

c) Stellen Sie die Vektoren

$$\widetilde{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \quad \widetilde{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^3 / U$$

bezüglich der Basis B dar. Sind diese beiden Vektoren linear unabhängig?

$$\widetilde{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \widetilde{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} = -2 \widetilde{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} - \widetilde{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\widetilde{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}} = \widetilde{\begin{pmatrix} -15 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}} = -15 \widetilde{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} - 7 \widetilde{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Ja, sie sind linear unabhängig, weil

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \in U$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \in U$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = \lambda_1 + 8\lambda_2 = 2\lambda_1 + 15\lambda_2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Jede lineare Abbildung ist bijektiv.

Nein

Gegenbeispiel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$

b) Jede bijektive Abbildung zwischen Vektorräumen ist linear.

Nein

Gegenbeispiel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x+1$

c) Ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linear und gilt $f \circ f = 0$, so ist f die Nullabbildung (d.h. $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$).

Nein

Gegenbeispiel: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$

Aufgabe 4

Seien V und W zwei endlich erzeugte $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann bijektiv ist, wenn das Bild einer Basis von V auch eine Basis von W bildet.



Annahme, dass f bijektiv ist, und sei $B = \{b_1, \dots, b_k\} \subseteq V$ eine Basis

① Ist $\sum_{i=1}^k \lambda_i f(b_i) = 0$, gilt dann $f(\sum_{i=1}^k \lambda_i b_i) = 0$

Da f bijektiv ist, haben wir $\sum_{i=1}^k \lambda_i b_i = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \Rightarrow \{f(b_1), \dots, f(b_k)\}$ linear unabhängig

② Da B eine Basis von V ist, ist $f(B)$ ein Erzeugendensystem von $\text{Bild}(f) = W$

$\Rightarrow f(B)$ ist eine Basis von W

← :

Sei B eine Basis von V und nehmen wir an, dass $f(B)$ eine Basis von W bildet.

Da $f(B)$ eine Basis von W ist, gilt

$$\forall w \in W : w \in \text{Span}(f(B)) = f(\text{Span}(B)) = f(V) = \text{Bild}(f)$$

$\Rightarrow f$ ist surjektiv

Sei $v \in V$ mit $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i$ und $f(v) = 0$, dann

$$f(v) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(b_i) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

$\Rightarrow \text{Kern}(f) = \{0\} \Rightarrow f$ ist injektiv