Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Maria Axenovich
M. Sc. Dingyuan Liu

Lineare Algebra I **Wintersemester 2024/25**

Übungsblatt 11 **Abgabe bis spätestens zum 20.01.2025 um 15:30 Uhr**

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V, W endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$.
Weiter sei $\Phi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Φ ist genau dann injektiv, wenn für jede linear unabhängige Teilmenge M von V das Bild $\Phi(M)$ linear unabhängig in W ist.

b) Φ ist genau dann surjektiv, wenn für jedes Erzeugendensystem M von V das Bild $\Phi(M)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

c) Φ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn für jede Basis M von V das Bild $\Phi(M)$ eine Basis von W ist.

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*

Gegeben seien endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume V_1, V_2, V_3 sowie lineare Abbildungen $\Phi\colon V_1 \to V_2$ und $\Psi\colon V_2 \to V_3$. Zeigen Sie

a) $\mathrm{Rg}(\Psi \circ \Phi) \leq \min\{\mathrm{Rg}(\Phi), \mathrm{Rg}(\Psi)\}$.
*Bitte verwenden Sie **nicht** das Ergebnis aus (b).*

b) $\mathrm{Rg}(\Psi \circ \Phi) = \mathrm{Rg}(\Phi) - \dim(\mathrm{Bild}\,\Phi \cap \mathrm{Kern}\,\Psi)$.

Aufgabe 3

Sei V ein (nicht notwendigerweise endlich dimensionaler) $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\Phi : V \to V$ eine lineare Abbildung.
Wir betrachten die folgenden vier Aussagen:

i) $\mathrm{Kern}(\Phi) \cap \mathrm{Bild}(\Phi) = \{0\}$.

ii) $V = \mathrm{Kern}(\Phi) + \mathrm{Bild}(\Phi)$.

iii) $\mathrm{Kern}(\Phi) = \mathrm{Kern}(\Phi^2)$.

iv) $\mathrm{Bild}(\Phi) = \mathrm{Bild}(\Phi^2)$.

a) Zeigen Sie, dass die Aussagen i) und iii) äquivalent sind.

b) Zeigen Sie, dass die Aussagen ii) und iv) äquivalent sind.

c) Zeigen Sie, dass alle vier Aussagen äquivalent sind, wenn V endlich dimensional ist.

d) Finden Sie im Fall $V = \mathbb{K}^2$ jeweils ein explizites Beispiel für Φ, sodass alle vier Aussagen wahr bzw. alle vier Aussagen falsch sind.

Abgabe der Lösungen bis zum 20.01.2025 um 15:30 Uhr auf **ILIAS im Abgabeportal Ihrer Tutoriumsgruppe** oder in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihrers Tutoriumsgruppe im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer** auf jedem Blatt. Jede Aufgabe wird mit **maximal 10 Punkten** bewertet.