

Sheet 11

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V, W endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$.

Weiter sei $\Phi: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Φ ist genau dann injektiv, wenn für jede linear unabhängige Teilmenge M von V das Bild $\Phi(M)$ linear unabhängig in W ist.

$\Rightarrow$:

$\forall$ linear unabhängige Menge $M = \{m_1, \dots, m_k\} \subseteq V$

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ mit

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \Phi(m_i) = 0$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i m_i\right) = 0$$

Da Φ injektiv ist, gilt $\text{Kern}(\Phi) = \{0\}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k \lambda_i m_i = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

$\Rightarrow \Phi(M)$ linear unabhängig

$\Leftarrow$:

Wir zeigen es durch Widerspruch

Annahme, dass Φ nicht injektiv ist

$$\Rightarrow \text{Kern}(\Phi) \neq \{0\} \Rightarrow \dim(\text{Kern}(\Phi)) \geq 1$$

Sei $M \subseteq V$ eine Basis von $\text{Kern}(\Phi)$

Dann haben wir, dass $\Phi(M)$ linear unabhängig ist

$$\Rightarrow \Phi(M) \neq \{0\} \quad \zeta$$

b) Φ ist genau dann surjektiv, wenn für jedes Erzeugendensystem M von V das Bild $\Phi(M)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

$\Rightarrow$:

$\forall$ Erzeugendensystem $M \subseteq V$

Sei $M' \subseteq M$ eine Basis von V mit $M' = \{m_1, \dots, m_k\}$

$\forall y \in W$, da Φ surjektiv ist,

$$\exists x = \sum_{i=1}^k \lambda_i m_i \in V : \Phi(x) = y$$

$$\Rightarrow y = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Phi(m_i)$$

$\Rightarrow \Phi(M) \supseteq \Phi(M')$ ist ein Erzeugendensystem von W

$\Leftarrow$:

Sei $M \subseteq V$ ein Erzeugendensystem, nämlich $\text{Span}(M) = V$

Da $\Phi(M)$ ein Erzeugendensystem von W ist, gilt

$$\begin{aligned} \text{Bild}(\Phi) &= \Phi(V) = \Phi(\text{Span}(M)) \\ &= \text{Span}(\Phi(M)) \\ &= W \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Phi$ ist surjektiv

c) Φ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn für jede Basis M von V das Bild $\Phi(M)$ eine Basis von W ist.

$\Rightarrow$:

$\forall$ Basis $M \subseteq V$

Da Φ injektiv ist, haben wir aus (a), dass $\Phi(M)$

linear unabhängig ist

Weil Φ ein Isomorphismus zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen ist, gilt

$$\dim(W) = \dim(V) = |M| = |\Phi(M)|$$

$\Rightarrow \Phi(M)$ ist eine Basis von W

$\Leftarrow$:

Es reicht zu zeigen, dass Φ bijektiv ist

$\forall$ Basis $M \subseteq V$: $\Phi(M)$ eine Basis von W

$\Rightarrow \forall$ lin. unabh. $M \subseteq V$: $\Phi(M)$ lin. unabh.

$\Rightarrow$ Aus (a) ist Φ injektiv

$\forall$ Erzeugendensystem $M \subseteq V$

Sei $M' \subseteq M$ eine Basis

$\Rightarrow \Phi(M')$ eine Basis von W

$\Rightarrow \Phi(M)$ Erzeugendensystem

$\Rightarrow$ Aus (b) ist Φ surjektiv

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben seien endlichdimensionale $\mathbb{K}$ -Vektorräume V_1, V_2, V_3 sowie lineare Abbildungen $\Phi: V_1 \rightarrow V_2$ und $\Psi: V_2 \rightarrow V_3$. Zeigen Sie

a) $\text{Rg}(\Psi \circ \Phi) \leq \min\{\text{Rg}(\Phi), \text{Rg}(\Psi)\}$.

Bitte verwenden Sie **nicht** das Ergebnis aus (b).

Denken Sie daran, dass

$$\text{Rg}(\psi \circ \phi) = \dim(\text{Bild}(\psi \circ \phi))$$

Da $\text{Bild}(\psi \circ \phi) \subseteq \text{Bild}(\psi)$, haben wir

$$\text{Rg}(\psi \circ \phi) \leq \dim(\text{Bild}(\psi)) = \text{Rg}(\psi)$$

Weil $\text{Bild}(\psi \circ \phi) = \psi(\text{Bild}(\phi))$, gilt

$$\begin{aligned} \text{Rg}(\psi \circ \phi) &= \dim(\text{Bild}(\psi \circ \phi)) \leq \dim(\text{Bild}(\phi)) \\ &= \text{Rg}(\phi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Rg}(\psi \circ \phi) \leq \min\{\text{Rg}(\psi), \text{Rg}(\phi)\}$$

Dies kann man auch mit Abbildungsmatrizen beweisen

$$b) \operatorname{Rg}(\Psi \circ \Phi) = \operatorname{Rg}(\Phi) - \dim(\operatorname{Bild} \Phi \cap \operatorname{Kern} \Psi).$$

Definiere eine lineare Abbildung

$$f: \Phi(V_1) \rightarrow V_2, \quad x \mapsto f(x) := \Psi(x)$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Rg}(\Psi \circ \Phi) &= \dim(\operatorname{Bild}(\Psi \circ \Phi)) \\ &= \dim(\Psi(\Phi(V_1))) \\ &= \dim(\operatorname{Bild}(f)) \\ &= \dim(\Phi(V_1)) - \dim(\operatorname{Kern}(f)) \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass

$$\dim(\Phi(V_1)) = \dim(\operatorname{Bild}(\Phi)) = \operatorname{Rg}(\Phi)$$

Außerdem gilt

$$\operatorname{Kern}(f) = \{x \in \Phi(V_1) \mid \Psi(x) = 0\}$$

$$= \operatorname{Bild}(\Phi) \cap \operatorname{Kern}(\Psi)$$

$$\Rightarrow \dim(\operatorname{Kern}(f)) = \dim(\operatorname{Bild}(\Phi) \cap \operatorname{Kern}(\Psi))$$

Deshalb haben wir

$$\operatorname{Rg}(\Psi \circ \Phi) \leq \operatorname{Rg}(\Phi) - \dim(\operatorname{Bild}(\Phi) \cap \operatorname{Kern}(\Psi))$$

Aufgabe 3

Sei V ein (nicht notwendigerweise endlich dimensionaler) $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $\Phi : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung.

Wir betrachten die folgenden vier Aussagen:

i) $\text{Kern}(\Phi) \cap \text{Bild}(\Phi) = \{0\}$.

ii) $V = \text{Kern}(\Phi) + \text{Bild}(\Phi)$.

iii) $\text{Kern}(\Phi) = \text{Kern}(\Phi^2)$.

iv) $\text{Bild}(\Phi) = \text{Bild}(\Phi^2)$.

a) Zeigen Sie, dass die Aussagen i) und iii) äquivalent sind.

(i) $\Rightarrow$ (iii) :

$$\begin{aligned}\text{Kern}(\Phi^2) &= \{x \in V \mid \Phi(\Phi(x)) = 0\} \\ &= \{x \in V \mid \Phi(x) \in \text{Kern}(\Phi)\} \\ &= \{x \in V \mid \Phi(x) \in \text{Kern}(\Phi) \cap \text{Bild}(\Phi)\} \\ &= \{x \in V \mid \Phi(x) = 0\} \\ &= \text{Kern}(\Phi)\end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) :

Annahme, dass $\exists x \in \text{Kern}(\Phi) \cap \text{Bild}(\Phi)$ mit $x \neq 0$

$$\Rightarrow \Phi(x) = 0$$

$$\exists y \in V : \Phi(y) = x$$

$$\Rightarrow \Phi(\Phi(y)) = 0$$

$$\Rightarrow y \in \text{Kern}(\Phi^2) = \text{Kern}(\Phi)$$

$$\Rightarrow x = \Phi(y) = 0 \quad \hookrightarrow$$

b) Zeigen Sie, dass die Aussagen ii) und iv) äquivalent sind.

(ii) $\Rightarrow$ (iv) :

$$\begin{aligned}\text{Bild}(\Phi^2) &= \{\Phi(x) \mid x \in \text{Bild}(\Phi)\} \\ &= \{\Phi(x) \mid x \in V - \text{Kern}(\Phi)\} \\ &= \{\Phi(a-b) \mid a \in V, b \in \text{Kern}(\Phi)\} \\ &= \{\Phi(a) \mid a \in V\} \\ &= \text{Bild}(\Phi)\end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ (ii) :

Es reicht zu zeigen, dass

$$V \subseteq \text{Kern}(\Phi) + \text{Bild}(\Phi)$$

$$\forall x \in V : \Phi(x) \in \text{Bild}(\Phi) = \text{Bild}(\Phi^2)$$

$$\Rightarrow \exists y \in \text{Bild}(\Phi) : \Phi(y) = \Phi(x)$$

$$\Rightarrow \Phi(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow x-y \in \text{Kern}(\Phi)$$

$$\Rightarrow x = (x-y) + y \in \text{Kern}(\Phi) + \text{Bild}(\Phi)$$

c) Zeigen Sie, dass alle vier Aussagen äquivalent sind, wenn V endlich dimensional ist.

Es reicht zu zeigen. $(i) \iff (ii)$

$(i) \implies (ii)$:

$$\text{Kern}(\Phi) + \text{Bild}(\Phi) \subseteq V \quad \text{trivial}$$

$$\dim(\text{Kern}(\Phi) + \text{Bild}(\Phi))$$

$$= \underbrace{\dim(\text{Kern}(\Phi)) + \dim(\text{Bild}(\Phi))}_{= \dim(V)} - \underbrace{\dim(\text{Kern}(\Phi) \cap \text{Bild}(\Phi))}_{= 0}$$

$$\implies \text{Kern}(\Phi) + \text{Bild}(\Phi) = V$$

$(ii) \implies (i)$:

$$\dim(\text{Kern}(\Phi) + \text{Bild}(\Phi))$$

$$= \underbrace{\dim(\text{Kern}(\Phi)) + \dim(\text{Bild}(\Phi))}_{= \dim(V)} - \dim(\text{Kern}(\Phi) \cap \text{Bild}(\Phi))$$

$$= \dim(V)$$

$$\implies \dim(\text{Kern}(\Phi) \cap \text{Bild}(\Phi)) = 0$$

$$\implies \text{Kern}(\Phi) \cap \text{Bild}(\Phi) = \{0\}$$

Geben Sie ein Gegenbeispiel wenn $\dim(V) = \infty$

d) Finden Sie im Fall $V = \mathbb{K}^2$ jeweils ein explizites Beispiel für Φ , sodass alle vier Aussagen wahr bzw. alle vier Aussagen falsch sind.

Alle wahr: $\Phi = \text{id}_V$

Alle falsch.

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$