Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Maria Axenovich
M. Sc. Dingyuan Liu

Lineare Algebra I **Wintersemester 2024/25**

Übungsblatt 12 **Abgabe bis spätestens zum 27.01.2025 um 15:30 Uhr**

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*
Es sei $B := \{b_1, \dots, b_5\}$ eine Basis eines reellen Vektorraums V und $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ mit

$$\begin{array}{rcrrrrrl}
\Phi(b_1) & = & 4b_1 & +2b_2 & & -2b_4 & -3b_5 & , \\
\Phi(b_2) & = & & & -2b_3 & & +b_5 & , \\
\Phi(b_3) & = & & -4b_2 & +2b_3 & & -b_5 & , \\
\Phi(b_4) & = & -2b_1 & & +3b_3 & +b_4 & -b_5 & , \\
\Phi(b_5) & = & & 3b_2 & & & +2b_5 & .
\end{array}$$

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen von Φ und $\Phi \circ \Phi$ bezüglich B.

b) Ist Φ bijektiv? Falls ja, bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von Φ^{-1} bezüglich B.

c) Sei $U := \mathrm{Span}\{c_1, c_2, c_3\}$ mit

$$c_1 := b_2 + b_3 + b_5, \qquad c_2 := -b_3 + b_5, \qquad c_3 := b_2 + b_5.$$

Zeigen Sie, dass $\Phi(U) \subseteq U$.

Aufgabe 2
Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\Phi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot x\,.$$

Bestimmen Sie eine geordnete Basis B von $\mathbb{R}^4$ und eine geordnete Basis C von $\mathbb{R}^3$, so dass Φ bezüglich der Basen B und C folgende Abbildungsmatrix hat:

$$M_C^B(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe 3

a) Sei $0 \leq \delta \leq \pi/2$ und sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, die den Einheitsquadrat $[0,1]^2$ um den Ursprung gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel δ rotieren lässt. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der Standardbasis.

b) Sei $L := \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $\mathrm{Bild}(\psi) = L$ und für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ ist das Segment von x nach $\psi(x)$ senkrecht zur Gerade L. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von ψ bezüglich der Standardbasis.

c) Berechnen Sie die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2025}$ mit Hilfe von (a).

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*

Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi, \psi \in V^* \setminus \{0\}$ zwei Linearformen. Zeigen Sie:

$$\varphi \text{ und } \psi \text{ sind linear abhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Kern}(\varphi) \subseteq \mathrm{Kern}(\psi).$$

Abgabe der Lösungen bis zum 27.01.2025 um 15:30 Uhr auf **ILIAS im Abgabeportal Ihrer Tutoriumsgruppe** oder in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihrers Tutoriumsgruppe im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer** auf jedem Blatt. Jede Aufgabe wird mit **maximal 10 Punkten** bewertet.