

Sheet 12

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $B := \{b_1, \dots, b_5\}$ eine Basis eines reellen Vektorraums V und $\Phi \in \text{Hom}(V, V)$ mit

$$\begin{aligned}\Phi(b_1) &= 4b_1 + 2b_2 - 2b_4 - 3b_5, \\ \Phi(b_2) &= -2b_3 + b_5, \\ \Phi(b_3) &= -4b_2 + 2b_3 - b_5, \\ \Phi(b_4) &= -2b_1 + 3b_3 + b_4 - b_5, \\ \Phi(b_5) &= 3b_2 + 2b_5.\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen von Φ und $\Phi \circ \Phi$ bezüglich B .

$$(a) \quad M_B^B(\Phi) = \begin{pmatrix} | & & & & | \\ \Theta_B(\Phi(b_1)) & \dots & \Theta_B(\Phi(b_5)) & & \\ | & & & & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_B^B(\Phi \circ \Phi) = M_B^B(\Phi) M_B^B(\Phi)$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ -1 & 11 & -11 & -19 & 6 \\ -10 & -4 & 12 & 9 & -6 \\ -10 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -14 & 4 & -8 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

b) Ist Φ bijektiv? Falls ja, bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von Φ^{-1} bezüglich B .

$$\begin{aligned}\Phi \text{ bijektiv} &\Leftrightarrow M_B^B(\Phi) \text{ invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Rg}(M_B^B(\Phi)) = 5\end{aligned}$$

Aber

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \quad \mathbb{Z}_1 := \mathbb{Z}_1 + 2\mathbb{Z}_4$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Rg}(M_B^B(\Phi)) \leq 4$$

$$\Rightarrow \Phi \text{ ist nicht bijektiv}$$

c) Sei $U := \text{Span}\{c_1, c_2, c_3\}$ mit

$$c_1 := b_2 + b_3 + b_5, \quad c_2 := -b_3 + b_5, \quad c_3 := b_2 + b_5.$$

Zeigen Sie, dass $\Phi(U) \subseteq U$.

$$b_2 = 2c_3 - c_1 - c_2 \in U$$

$$b_3 = c_1 - c_3 \in U$$

$$b_5 = c_3 - b_2 \in U$$

Da $\dim(U) \leq |\{c_1, c_2, c_3\}| = 3$ und $\{b_2, b_3, b_5\}$ linear unabhängig ist, bildet $\{b_2, b_3, b_5\}$ eine Basis von U .

$$\Phi(b_2) = -2b_3 + b_5 \in U$$

$$\Phi(b_3) = -4b_2 + 2b_3 - b_5 \in U$$

$$\Phi(b_5) = 3b_2 + 2b_5 \in U$$

$\Rightarrow$

$$\Phi(U) = \Phi(\text{Span}\{b_2, b_3, b_5\})$$

$$= \text{Span}\{\Phi(b_2), \Phi(b_3), \Phi(b_5)\}$$

$$\subseteq U$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot x.$$

Bestimmen Sie eine geordnete Basis B von $\mathbb{R}^4$ und eine geordnete Basis C von $\mathbb{R}^3$, so dass Φ bezüglich der Basen B und C folgende Abbildungsmatrix hat:

$$M_C^B(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M_C^B(\Phi) = \begin{pmatrix} | & & & | \\ \Theta_C(\Phi(b_1)) & \dots & \Theta_C(\Phi(b_4)) \\ | & & & | \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

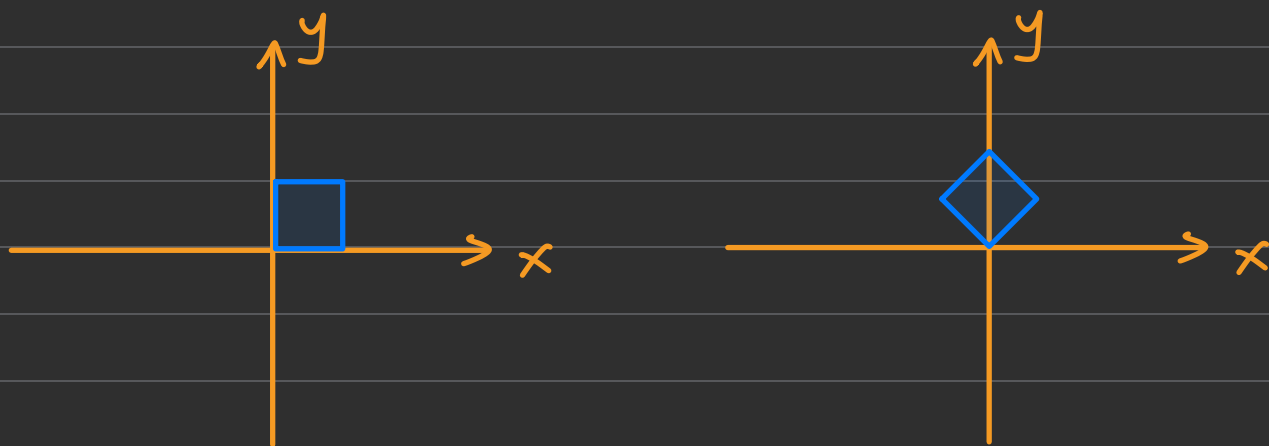
$$\Leftrightarrow \Phi(b_1) = c_1, \quad \Phi(b_2) = c_2, \quad \Phi(b_3) = \Phi(b_4) = 0$$

1. Finde $\{b_3, b_4\}$ mit $\Phi(b_3) = \Phi(b_4) = 0$
2. Erweitere $\{b_3, b_4\}$ zu einer Basis $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$
3. Setze $c_1 = \Phi(b_1)$, $c_2 = \Phi(b_2)$
4. Erweitere $\{c_1, c_2\}$ zu einer Basis $\{c_1, c_2, c_3\}$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 3

- a) Sei $0 \leq \delta \leq \pi/2$ und sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, die den Einheitsquadrat $[0,1]^2$ um den Ursprung gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel δ rotieren lässt. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der Standardbasis.

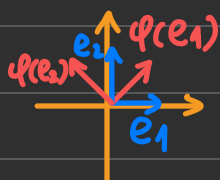


Sei $\{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die Standardbasis

Es reicht eine lineare Abbildung φ zu finden, die e_1 und e_2 rotiert. Dann haben wir

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \underline{x\varphi(e_1) + y\varphi(e_2)}$$

den Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ um denselben Winkel rotieren

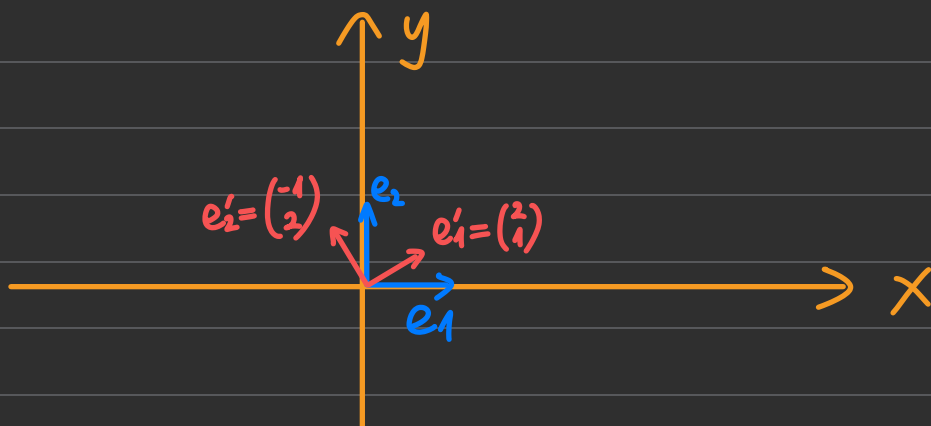


$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin \delta \\ \cos \delta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M(\varphi) = (\varphi(e_1) \quad \varphi(e_2)) = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}$$

b) Sei $L := \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $\text{Bild}(\psi) = L$ und für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ ist das Segment von x nach $\psi(x)$ senkrecht zur Gerade L . Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von ψ bezüglich der Standardbasis.



Seien $B = \{e_1, e_2\}$ und $C = \{e'_1, e'_2\}$ zwei Basen von $\mathbb{R}^2$

Beachte, dass C eine orthogonale Basis ist

$\Rightarrow \psi$ bildet jedes $v \in \mathbb{R}^2$ auf die erste Koordinate von $\theta_C(v)$ ab

$$\Rightarrow M_C^C(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M_B^B(\psi) = S M_C^C(\psi) T$, wobei S und T die Übergangsmatrizen von C nach B bzw. von B nach C sind, nämlich

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_B^B(\psi) = \begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2025}$ mit Hilfe von (a).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right)^{2025}$$

$$= (\sqrt{2})^{2025} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}^{2025}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}^8 = E$$

$$= (\sqrt{2})^{2025} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}^1$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{1012} & -2^{1012} \\ 2^{1012} & 2^{1012} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $\varphi, \psi \in V^* \setminus \{0\}$ zwei Linearformen. Zeigen Sie:

$$\varphi \text{ und } \psi \text{ sind linear abhängig} \iff \text{Kern}(\varphi) \subseteq \text{Kern}(\psi).$$

$\Rightarrow$:

$$\text{Sei } \psi = \alpha \varphi \text{ mit } \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

$$\text{Dann } \varphi(x) = 0 \Rightarrow \psi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(\varphi) \subseteq \text{Kern}(\psi)$$

$\Leftarrow$:

$$\text{Sei } \text{Kern}(\varphi) \subseteq \text{Kern}(\psi)$$

$$\text{Da } \varphi, \psi \neq 0, \text{ gilt}$$

$$0 < \dim(\text{Bild}(\varphi)), \dim(\text{Bild}(\psi)) \leq \dim(\mathbb{K}) = 1$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Bild}(\varphi)) = \dim(\text{Bild}(\psi)) = 1$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Kern}(\varphi)) = \dim(\text{Kern}(\psi)) = \dim(V) - 1$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(\varphi) = \text{Kern}(\psi)$$

Sei $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ eine Basis von V , wobei $\{b_1, \dots, b_{k-1}\}$ eine Basis von $\text{Kern}(\varphi) = \text{Kern}(\psi)$ ist

$$\Rightarrow \varphi(b_k), \psi(b_k) \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{\psi(b_k)}{\varphi(b_k)} \varphi, \text{ weil } \forall x = \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i \in V:$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \psi(b_i) = \lambda_k \psi(b_k) \\ &= \frac{\psi(b_k)}{\varphi(b_k)} \lambda_k \varphi(b_k) = \frac{\psi(b_k)}{\varphi(b_k)} \varphi(x) \end{aligned}$$