Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Maria Axenovich
M. Sc. Dingyuan Liu

Lineare Algebra I **Wintersemester 2024/25**

Übungsblatt 13 **Abgabe bis spätestens zum 03.02.2025 um 15:30 Uhr**

Aufgabe 1

Seien

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\},$$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}, \quad C' = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

geordnete Basen von $\mathbb{R}^4$. Sei $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit

$$M_C^B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $M_{C'}^{B'}(\phi)$.

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

a) $$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ mit } \sum_{k=1}^n a_k = 2024.$$

b) $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, gegeben durch $b_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$ mit $1 \leq i, j \leq n$.

Aufgabe 3

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sei die folgende Matrix gegeben:

$$V_n := \begin{pmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \cdots & a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \cdots & a_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\det(V_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n} (a_i - a_j)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*
Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

mit $4 \leq m < n$ und definiere $L_b := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ für jedes $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Finden Sie alle Werte von b, sodass L_b ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $b \in \mathbb{R}^m$ die Menge L_b entweder leer oder unendlich ist.

c) Ist L_b eine Translation eines d-dimensionalen Unterraums von $\mathbb{R}^n$ für ein $b \in \mathbb{R}^m$, bestimmen Sie den Rang von A.

d) Sei

$$B = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ a_{m2} & a_{m1} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

und der Rang von A sei wie in (c) ermittelt. Bestimmen Sie die Dimension von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Bx = 0\}$.

Abgabe der Lösungen bis zum 03.02.2025 um 15:30 Uhr auf **ILIAS im Abgabeportal Ihrer Tutoriumsgruppe** oder in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihrers Tutoriumsgruppe im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer** auf jedem Blatt. Jede Aufgabe wird mit **maximal 10 Punkten** bewertet.