

Sheet 13

Aufgabe 1

Seien

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad C' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

geordnete Basen von $\mathbb{R}^4$. Sei $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit

$$M_C^B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $M_{C'}^{B'}(\phi)$.

$$M_{C'}^{B'}(\phi) = M_{C'}^C(\text{id}) \cdot M_C^B(\phi) \cdot M_B^{B'}(\text{id})$$

$$M_B^{B'}(\text{id}) = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \Theta_B(b'_1) & \Theta_B(b'_2) & \Theta_B(b'_3) & \Theta_B(b'_4) \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{C'}^C(\text{id}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$m_{c'}^B(\Phi) = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 6 & 5 \\ 7 & 1 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ mit } \sum_{k=1}^n a_k = 2024.$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow z_i := z_i - z_n \text{ für alle } i=1, \dots, n-1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow s_n := s_n + s_{n-1} + \cdots + s_1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1 + \sum_{i=1}^n a_i \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow \text{Entwickle nach Zeile, von } z_1 \text{ bis } z_{n-1}$$
$$\Downarrow \text{Oder } \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^n a_n = 2025$$

b) $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, gegeben durch $b_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$ mit $1 \leq i, j \leq n$.

Sei A wie in (a) mit $a_1 = a_2 = \dots = a_n = -1$

Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{pmatrix} = -B$$

$$\Rightarrow \det(B) = (-1)^n \det(A)$$

$$= (-1)^n \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i \right)$$

$$= (-1)^n (1 - n)$$

Aufgabe 3

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sei die folgende Matrix gegeben:

$$V_n := \begin{pmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \cdots & a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \cdots & a_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\det(V_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Wir zeigen dies durch Induktion über $n \geq 2$.

$$n=2: \det(V_2) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix} = a_1 - a_2$$

$n > 2$: Annahme, dass $\det(V_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_i - a_j)$

$$\det(V_n) = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \cdots & a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow S_1 := S_1 - a_n \cdot S_2$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^{n-2}(a_1 - a_n) & a_1^{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_n) & a_2^{n-2} & \cdots & a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) & a_{n-1}^{n-2} & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & a_n^{n-2} & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow S_2 &:= S_2 - a_n S_3 \\ &\vdots \\ \Downarrow S_{n-1} &:= S_{n-1} - a_n S_n \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^{n-2}(a_1 - a_n) & a_1^{n-3}(a_1 - a_n) & \dots & a_1 - a_n & 1 \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_n) & a_2^{n-3}(a_2 - a_n) & \dots & a_2 - a_n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) & a_{n-1}^{n-3}(a_{n-1} - a_n) & \dots & a_{n-1} - a_n & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\Downarrow$ Entwickle nach z_n
oder durch Leibniz Formel

$$= \begin{vmatrix} a_1^{n-2}(a_1 - a_n) & a_1^{n-3}(a_1 - a_n) & \dots & a_1 - a_n \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_n) & a_2^{n-3}(a_2 - a_n) & \dots & a_2 - a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) & a_{n-1}^{n-3}(a_{n-1} - a_n) & \dots & a_{n-1} - a_n \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 - a_n)(a_2 - a_n) \dots (a_{n-1} - a_n) \cdot \det(V_{n-1})$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

mit $4 \leq m < n$ und definiere $L_b := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ für jedes $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Finden Sie alle Werte von b , sodass L_b ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

$L_b \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum

$\iff$

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in L_b :$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in L_b$$

$$\begin{aligned} \text{D.h. } A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2 \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) b \\ &= b \end{aligned}$$

$$\implies b = 0$$

b) Zeigen Sie, dass für jedes $b \in \mathbb{R}^m$ die Menge L_b entweder leer oder unendlich ist.

Annahme, dass $L_b \neq \emptyset$

Sei $x_0 \in L_b$, dann gilt $L_b = x_0 + \underline{L_0}$

$$L_0 = \text{Kern}(\Phi) \text{ mit } \Phi(x) = Ax$$

$$\begin{aligned} \text{Da } \dim(L_0) &= \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\text{Bild}(\Phi)) \\ &= n - \text{Rg}(A) \geq n - m \geq 1 \end{aligned}$$

$$\implies |L_0| = \infty \implies |L_b| = \infty$$

c) Ist L_b eine Translation eines d -dimensionalen Unterraums von $\mathbb{R}^n$ für ein $b \in \mathbb{R}^m$, bestimmen Sie den Rang von A .

Es gilt $L_b = x_0 + L_0$ mit $x_0 \in L_b$

$\Rightarrow L_0 = L_b - x_0$ ist auch eine Translation eines d -dimensionalen Unterraums

Beachte, dass $L_0 = \text{Kern}(\Phi)$ mit $\Phi(x) = Ax$

$$\Rightarrow \dim(\text{Kern}(\Phi)) = \dim(L_0) = d$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{Rg}(A) &= \dim(\text{Bild}(\Phi)) \\ &= \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\text{Kern}(\Phi)) \\ &= n - d\end{aligned}$$

d) Sei

$$B = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ a_{m2} & a_{m1} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

und der Rang von A sei wie in (c) ermittelt. Bestimmen Sie die Dimension von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Bx = 0\}$.

Beobachte, dass $A \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} A' \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} B$

Deshalb haben wir $A' = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot A'$

$\Rightarrow B$ und A sind äquivalent

$$\Rightarrow \operatorname{Rg}(B) = \operatorname{Rg}(A)$$

$$\Rightarrow \dim(\{x \in \mathbb{R}^n \mid Bx = 0\}) = \dim(L_0) \\ = d$$

Ein alternativer Ansatz ist es, eine Bijektion

$f: \{x \in \mathbb{R}^n \mid Bx = 0\} \rightarrow L_0$ zu finden

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mapsto (x_2, x_1, x_3, \dots, x_n)$$