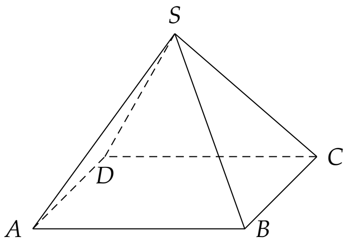
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Maria Axenovich
M. Sc. Dingyuan Liu

Lineare Algebra I **Wintersemester 2024/25**

Übungsblatt 14 **Abgabe bis spätestens zum 10.02.2025 um 15:30 Uhr**

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

a) Gegeben sei eine Pyramide mit $A = (3, -2, -1), B = (3, 3, -6), C = (0, 3, -3), D = (2, -1, -1)$ und $S = (6, 7, 8)$. Berechnen Sie ihr Volumen mithilfe der Determinante.



b) Seien $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D.$$

Dabei ist die linke Matrix in $\mathbb{K}^{(m+n)\times(m+n)}$ wie angegeben aus den Blöcken A, B, der Nullmatrix und D zusammengesetzt.

Aufgabe 2

a) Sei $Ax = 0$ ein LGS, wobei $A := \prod_{i=1}^{k} A_i$ mit $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und A_j den Eigenwert 0 für ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ hat. Zeigen Sie, dass es mindestens 5 verschiedene Lösungen für das LGS gibt.

b) Seien $V_1, V_2, \ldots, V_k, V_{k+1}$ n-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei

$$\phi := \phi_k \circ \phi_{k-1} \circ \cdots \circ \phi_1,$$

wobei $\phi_i : V_i \to V_{i+1}$ eine lineare Abbildung für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ ist. Beweisen Sie, dass ϕ genau dann surjektiv ist, wenn alle ϕ_i surjektiv sind.

c) Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{2\times 2}.$$

Wie viele Lösungen $x \in \mathbb{F}_3^2$ hat das LGS $Ax = 0$?

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*

Gegeben sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 2+t & 4 & 2+t & 2+t \\ t-2 & 0 & -6+t & -2-t \\ -t+2 & -4 & -t+2 & -2-t \\ 0 & 0 & 0 & 2t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ alle Eigenwerte der Matrix A_t. Bestimmen Sie außerdem die zugehörigen Eigenräume und deren Dimension für $t \in \{-2, 2\}$.

Aufgabe 4

Es seien V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und Φ ein Endomorphismus von V.
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Gilt $\Phi^2 = \Phi$, so hat Φ keine Eigenwerte außer 0 und 1.

b) Hat Φ^2 den Eigenwert λ^2, so hat Φ den Eigenwert λ.

c) Ist Φ bijektiv und λ Eigenwert von Φ, so ist λ^{-1} Eigenwert von Φ^{-1}.

Abgabe der Lösungen bis zum 10.02.2025 um 15:30 Uhr auf **ILIAS im Abgabeportal Ihrer Tutoriumsgruppe** oder in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihrers Tutoriumsgruppe im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer** auf jedem Blatt. Jede Aufgabe wird mit **maximal 10 Punkten** bewertet.