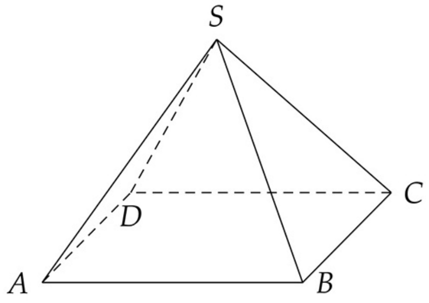
Sheet 14

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

a) Gegeben sei eine Pyramide mit $A = (3,-2,-1), B = (3,3,-6), C = (0,3,-3), D = (2,-1,-1)$ und $S = (6,7,8)$. Berechnen Sie ihr Volumen mithilfe der Determinante.



Beachten Sie, dass ABCD kein Parallelogramm ist. Also kann man die Formel nicht direkt auf die Pyramide P_{ABCDS} anwenden.

Wir können die Pyramide P_{ABCDS} in zwei Pyramiden P_{ACDS} und P_{BCDS} aufteilen. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}(P_{ABCDS}) = \mathrm{Vol}(P_{ACDS}) + \mathrm{Vol}(P_{ABCS})$$

Sei T das Parallelepiped, das durch die Vektoren $\overrightarrow{DA} = (1,-1,0)$, $\overrightarrow{DC} = (-2,4,-2)$, und $\overrightarrow{DS} = (4,8,9)$ betimmt wird.

Aus Schulmathe wissen wir, dass

$$\mathrm{Vol}(P_{ACDS}) = \frac{1}{6}\mathrm{Vol}(T) = \underbrace{\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & 9 \end{pmatrix}\right|}_{\text{Formel aus Vorlesung}} = 7$$

Ebenso haben wir

$$\mathrm{Vol}(P_{ABCS}) = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -5 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 14 \end{pmatrix}\right| = 52.5$$

$$\Rightarrow \mathrm{Vol}(P_{ABCDS}) = 59.5$$

b) Seien $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D.$$

Dabei ist die linke Matrix in $\mathbb{K}^{(m+n)\times(m+n)}$ wie angegeben aus den Blöcken A, B, der Nullmatrix und D zusammengesetzt.

Wir zeigen dies durch Induktion über $m \in \mathbb{N}$

$m=1$: Sei $A = a \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ Entwickeln nach 1te Spalte

$$= a \det D$$
$$= \det A \cdot \det D$$

$m>1$. Annahme, dass die Behauptung wahr für $m-1$ ist

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} (-1)^{1+i} a_{i1} \det\begin{pmatrix} A_{i1} & * \\ 0 & D \end{pmatrix}}_{\text{Entwickeln nach 1te Spalte}}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} (-1)^{1+i} a_{i1} \det A_{i1} \cdot \det D}_{\text{Induktionshypothese}}$$

$$= \det D \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{m} (-1)^{1+i} a_{i1} \det A_{i1}}_{= \det A}$$

$$= \det A \cdot \det D$$

Aufgabe 2

a) Sei $Ax = 0$ ein LGS, wobei $A := \prod_{i=1}^{k} A_i$ mit $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und A_j den Eigenwert 0 für ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ hat. Zeigen Sie, dass es mindestens 5 verschiedene Lösungen für das LGS gibt.

A_j hat Eigenwert 0

$$\Leftrightarrow \det(\underbrace{A_j - 0 \cdot I_n}_{I_n \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ ist die Einheitsmatrix}}) = \det(A_j) = 0$$

$$\Leftrightarrow Rg(A_j) < n$$

$$\Rightarrow \underbrace{Rg(A) \leq \min\{Rg(A_1), \ldots, Rg(A_k)\}}_{\text{Dies haben wir im vorherigen Blatt bewiesen}} < n$$

$\Rightarrow$ Sei $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ der Lösungsraum

Dann gilt $\underbrace{\dim(L) = n - Rg(A)}_{\text{da } L = \mathrm{Kern}(\Phi) \text{ mit } \Phi(x) = Ax} \geq 1$

$$\Rightarrow |L| = \underbrace{|\mathbb{R}|^{\dim(L)}}_{\substack{\text{Wenn wir } \mathbb{R} \text{ durch } \mathbb{F}_5 \text{ ersetzen, haben wir} \\ \text{immer noch, dass } Ax=0 \text{ mindestens 5 Lösungen hat}}} = \infty$$

b) Seien $V_1, V_2, \dots, V_k, V_{k+1}$ n-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei

$$\phi := \phi_k \circ \phi_{k-1} \circ \cdots \circ \phi_1,$$

wobei $\phi_i : V_i \to V_{i+1}$ eine lineare Abbildung für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ ist. Beweisen Sie, dass ϕ genau dann surjektiv ist, wenn alle ϕ_i surjektiv sind.

Sei $B_i \subseteq V_i$ eine Basis für $i = 1, \dots, k+1$

Sei $A_i = M^{B_i}_{B_{i+1}}(\Phi_i)$ die Abbildungsmatrix von Φ_i für $i = 1, \dots, k$

Dann gilt $M^{B_1}_{B_{k+1}}(\Phi) = \prod_{i=1}^{k} A_i =: A$

Wir haben deshalb

Φ ist surjektiv $\Longleftrightarrow \dim(\mathrm{Bild}(\Phi)) = n$

$\Longleftrightarrow \mathrm{Rg}(A) = n$

$\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

$\Longleftrightarrow \forall i = 1, \dots, k : \det(A_i) \neq 0$

Da $\det(A) = \det\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \det(A_i)$

$\Longleftrightarrow$ alle Φ_i sind surjektiv

c) Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{2\times 2}.$$

Wie viele Lösungen $x \in \mathbb{F}_3^2$ hat das LGS $Ax = 0$?

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\,1 - 2\,2 = -3 = 0 \pmod 3$$

Entwickeln nach 1te Zeile

$$\Longrightarrow \quad Rg(A) < 2$$

Da A keine Nullmatrix ist, gilt $Rg(A) = 1$

Sei $L = \{x \in \mathbb{F}_3^2 \mid Ax = 0\}$

$$\Longrightarrow \quad \dim(L) = 2 - Rg(A) > 0$$

$$\Longrightarrow \quad |L| = |\mathbb{F}_3|^{\dim(L)} = |\mathbb{F}_3|^1 = 3$$

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*
Gegeben sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 2+t & 4 & 2+t & 2+t \\ t-2 & 0 & -6+t & -2-t \\ -t+2 & -4 & -t+2 & -2-t \\ 0 & 0 & 0 & 2t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ alle Eigenwerte der Matrix A_t. Bestimmen Sie außerdem die zugehörigen Eigenräume und deren Dimension für $t \in \{-2, 2\}$.

$$\det(A_t - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 2+t-\lambda & 4 & 2+t & 2+t \\ t-2 & -\lambda & -6+t & -2-t \\ -t+2 & -4 & -t+2-\lambda & -2-t \\ 0 & 0 & 0 & 2t-\lambda \end{vmatrix}$$

$I_4 \in \mathbb{R}^{4\times4}$ Einheitsmatrix

$$\Big\Downarrow \; Z_3 := Z_3 + Z_1$$

$$= \begin{vmatrix} 2+t-\lambda & 4 & 2+t & 2+t \\ t-2 & -\lambda & -6+t & -2-t \\ 4-\lambda & 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2t-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Big\Downarrow \; S_1 := S_1 - S_3$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 2+t & 2+t \\ 4 & -\lambda & -6+t & -2-t \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2t-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Big\Downarrow \; \text{Entwickeln nach } Z_4 \text{ und danach } Z_3$$

$$= (2t-\lambda)(4-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2t)(\lambda+4)(\lambda-4)^2$$

Fall 1: $t \neq \pm 2$

$\lambda_1 = 2t$ mit algebraischer Vielfachheit $m(\lambda_1) = 1$

$\lambda_2 = -4$ mit $m(\lambda_2) = 1$

$\lambda_3 = 4$ mit $m(\lambda_3) = 2$

Fall 2: $t = 2$

$$\Longrightarrow \det(A - \lambda I_4) = (\lambda+4)(\lambda-4)^3$$

$\lambda_1 = -4$ mit $m(\lambda_1) = 1$

$\lambda_2 = 4$ mit $m(\lambda_2) = 3$

$$E_{\lambda_1} = \underbrace{\operatorname{Kern}(A - \lambda_1 I_4)}_{:= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid (A-\lambda_1 I_4)x = 0\}} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Big\Downarrow \begin{array}{l} z_i = \frac{1}{4} z_i \text{ für } i = 1,2,3 \\ z_4 = \frac{1}{8} z_4 \end{array}$$

$$= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\Downarrow \begin{array}{l} z_i := z_i + z_4 \text{ für } i = 2,3 \\ z_1 := z_1 - z_4 \end{array}$$

$$= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\Downarrow \begin{array}{l} z_3 := z_3 + z_2 \\ z_1 := \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \end{array}$$

$$= \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das LGS lösen

$$= \{(-a, a, a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$= \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ebenso haben wir

$$E_{\lambda_2} = \text{Kern}(A - \lambda_2 I_4) = \text{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Fall 3 : $t = -2$

$$\Longrightarrow \det(A - \lambda I_4) = (\lambda+4)^2(\lambda-4)^2$$

$\lambda_1 = -4$ mit $m(\lambda_1) = 2$

$\lambda_2 = 4$ mit $m(\lambda_2) = 2$

$$E_{\lambda_1} = \text{Kern}(A - \lambda_1 I_4) = \text{Kern}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -8 & 0 \\ 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{\lambda_2} = \mathrm{Kern}(A - \lambda_2 I_4) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -8 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 4

Es seien V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und Φ ein Endomorphismus von V. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Gilt $\Phi^2 = \Phi$, so hat Φ keine Eigenwerte außer 0 und 1.

Wahr

Sei λ ein Eigenwert von Φ

Dann $\exists\, v \in V \setminus \{0\} : \Phi(v) = \lambda v$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi^2(v) = \Phi(v) = \lambda v \\ \Phi^2(v) = \Phi(\Phi(v)) = \Phi(\lambda v) = \lambda \Phi(v) = \lambda^2 v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda v - \lambda^2 v = \lambda(1-\lambda) v = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \text{ oder } 1$$

b) Hat Φ^2 den Eigenwert λ^2, so hat Φ den Eigenwert λ.

Falsch.

Gegenbeispiel: $\Phi = \mathrm{id}_V$

$\Longrightarrow$ Φ^2 hat Eigenwert $1 = (-1)^2$

Aber -1 ist kein Eigenwert von Φ

Korrigiert:

$\boxed{\text{Hat } \Phi \text{ den Eigenwert } \lambda \text{, so hat } \Phi^2 \text{ den Eigenwert } \lambda^2.}$

Bew.

Sei λ ein Eigenwert von Φ und $v \in V \setminus \{0\}$ den Eigenvektor

$\Longrightarrow \Phi^2(v) = \Phi(\lambda v) = \lambda \Phi(v) = \lambda^2 v$

$\Longrightarrow \lambda^2$ ist ein Eigenwert von Φ^2

c) Ist Φ bijektiv und λ Eigenwert von Φ, so ist λ^{-1} Eigenwert von Φ^{-1}.

Wahr.

Φ bijektiv $\underset{\text{(warum?)}}{\Longrightarrow}$ $\lambda \neq 0$

Sei $v \in V \setminus \{0\}$ mit $\Phi(v) = \lambda v$

$\Longrightarrow \Phi^{-1}(v) = \Phi^{-1}(\lambda^{-1} \cdot \lambda v) = \lambda^{-1} \Phi^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1} v$