Aufgabe 1.1

(a) $D \subseteq GL_3(\mathbb{R})$, da $\det A = 1 \neq 0$ für jedes $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in D$. Also z.z.: D ist UG von $GL_3(\mathbb{R})$.

- Wegen $I_3 \in D$, ist $D \neq \emptyset$.
- Für bel. $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a'+a & b'+ac'+b \\ 0 & 1 & c'+c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in D \qquad (*)$$

Somit ist D abgeschlossen bzgl. Matrizenmultiplikation.

- Für $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in D$ ist A^{-1} aus $(*)$ leicht zu bestimmen (durch Nullsetzen von $a'+a$, $b'+ac'+b$ und $c'+c$) als $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in D$

Somit ist D auch abgeschl. bzgl. Inversenbildung.

Nach dem UG-Kriterium folgt nun, dass D eine Gruppe ist wie behauptet.

D ist nicht kommutativ, denn z.B. ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Gesucht sind alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & 1 & \tilde{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & 1 & \tilde{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{R},$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & a+\tilde{a} & \tilde{b}+a\tilde{c}+b \\ 0 & 1 & c+\tilde{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}+a & b+\tilde{a}c+\tilde{b} \\ 0 & 1 & \tilde{c}+c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

Das ist offenbar genau dann erfüllt, wenn

$$\tilde{b} + a\tilde{c} + b = b + \tilde{a}c + \tilde{b} \qquad \text{bzw.} \qquad a\tilde{c} = \tilde{a} \cdot c \quad \forall \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Die letzte Gleichung muss insbes. für $\tilde{a} = 0$ und $\tilde{c} \neq 0$ gelten, woraus $a = 0$ folgt und damit auch $c = 0$.

Somit können nur Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$ in der Menge

$$Z := \{A \in D : A \cdot B = B \cdot A \ \forall B \in D\}$$

liegen. Tatsächlich gilt

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathbb{R} \right\},$$

d.h. jede solche Matrix liegt in Z, denn sie kommutiert mit allen $B \in D$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & 1 & \tilde{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a} & \tilde{b}+b \\ 0 & 1 & \tilde{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & 1 & \tilde{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.2

$$\det A_1 = \det(1+t^2) = 1+t^2$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1+t^2 & t \\ t & 1+t^2 \end{vmatrix} = (1+t^2)^2 - t^2 = 1+t^2+t^4$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1+t^2 & t & 0 \\ t & 1+t^2 & t \\ 0 & t & 1+t^2 \end{vmatrix} = (1+t^2)^3 - 2t^2(1+t^2)$$

$$= (1+t^2)\cdot(1+2t^2+t^4-2t^2) = 1+t^2+t^4+t^6$$

Beh: $\det A_n = 1+t^2+\ldots+t^{2n}$ (für $n\in\mathbb{N}$ und $t\in\mathbb{R}$)

Beweis: (vollständige Induktion)

Für den Ind.anfang siehe oben.

Induktionsschritt: Die Beh. gelte schon für $k \leq n-1$.

Wir entwickeln $\det A_n$ zunächst nach der ersten Zeile und die verbleibende Matrix nach der ersten Spalte:

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 1+t^2 & t & 0 & \cdots & 0 \\ t & 1+t^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & 0 & t & 1+t^2 \end{vmatrix} = (1+t^2)\cdot\det A_{n-1} - t\cdot\begin{vmatrix} t & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+t^2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & t & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & 0 & t & 1+t^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1+t^2)\det A_{n-1} - t^2 \det A_{n-2}$$

$$= (1+t^2)\sum_{i=0}^{n-1} t^{2i} - t^2\sum_{i=0}^{n-2} t^{2i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} t^{2i} + t^{2n} = \sum_{i=0}^{n} t^{2i}$$

Also gilt die Beh. für $k=n$.

Aufgabe 1.3

Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom von A_t:

$$P_t = \det(A_t - X I_4) = \begin{vmatrix} t+4-X & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2-X & 0 & t \\ 1 & 0 & t-X & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \text{ | Entw.} = (2-X)\begin{vmatrix} t+4-X & 0 & 5 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 1 & 0 & t-X \end{vmatrix} \text{ | Entw.}$$

$$= (2-X)^2 \cdot \begin{vmatrix} t+4-X & 5 \\ 1 & t-X \end{vmatrix} = (2-X)^2 \cdot \left(t^2+4t\overset{-5}{\vee}-(2t+4)X + X^2 \right)$$

Neben 2 ergeben sich daraus noch die Eigenwerte

$$t+2 \pm \sqrt{\frac{(2t+4)^2}{4} - (t^2+4t-5)} = (t+2) \pm \sqrt{9} = (t+2) \pm 3,$$

d.h. $t+5$ und $t-1$.

Damit A_t diagonalisierbar sein kann, muss der Eigenraum E_2 mindestens die Dimension 2 haben (genau 2, falls $t+5 \neq 2$ und $t-1 \neq 2$, d.h. $t \neq \pm 3$, und genau 3, falls $t = \pm 3$)

$$E_2 = \mathrm{Kern}(A_t - 2 I_4) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} t+2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & t-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \urcorner - \\ \\ \lrcorner \cdot (t+2) \\ \\ \end{matrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9-t^2 & -1-t \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & t-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim E_2 \geq 2$ ergibt sich nur, falls entweder $t=0$ (2. Zeile ~~verschw~~ wird 0) oder $t = \pm 3$ (dann $9-t^2=0$; die 1. Zeile und 2. Zeile werden lin. abh.)

Im Falle $t=0$ ist

$$E_2 = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=:b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:b_2} \right], \text{ also } \dim E_2 = 2$$

Für die anderen beiden EW 5 und -1 gilt $\dim E_5 = \dim E_{-1} = 1$. A_0 ist somit diagonalisierbar.

Im Falle $t = \pm 3$ erhält man auch $\dim E_2 = 2$, die (algebraische) Vielfachheit von 2 (im charakt. Polynom) ist aber 3. Also sind A_3 und A_{-3} nicht diag.

Zur Bestimmung einer Matrix S, so dass $S^{-1} A_0 S$ Diagonalgestalt hat, benötigen wir eine Basis aus Eigenvektoren. Die oben bestimmten EV b_1 und b_2 aus E_2 lassen sich durch $b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_5$ und $b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_{-1}$ zu einer Basis ergänzen.

$S := (b_1 \mid b_2 \mid b_3 \mid b_4)$ ist dann die gesuchte Matrix.

Aufgabe 1.4

$V \ldots$ VR über $\mathbb{K}$, $\Phi : V \to V$ Endomorphismus, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ EW von Φ mit $\mu \neq \lambda$

Sei $W := \operatorname{Kern}((\Phi - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (\Phi - \mu\,\mathrm{id}))$

Beh: $W = E_\lambda + E_\mu$

Beweis:

"$\supseteq$": Sei $v \in E_\lambda$, also $\Phi(v) = \lambda \cdot v$. Dann

$$((\Phi - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (\Phi - \mu\,\mathrm{id}))(v) = (\Phi - \lambda\,\mathrm{id})(\Phi(v) - \mu \cdot v) = (\Phi - \lambda\,\mathrm{id})(\lambda v - \mu v)$$

$$= (\lambda - \mu) \cdot (\Phi - \lambda\,\mathrm{id})(v) = (\lambda - \mu)(\underbrace{\Phi(v) - \lambda \cdot v}_{=0}) = 0$$

und somit $v \in W$, d.h. $E_\lambda \subset W$.

Für $v \in E_\mu$ gilt analog $\Phi(v) = \mu \cdot v$ und

$$(\Phi - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (\Phi - \mu\,\mathrm{id})(v) = (\Phi - \lambda\,\mathrm{id})(\underbrace{\Phi(v) - \mu \cdot v}_{=0}) = 0.$$

Also $v \in W$ und damit $E_\mu \subseteq W$.

Da W als Kern einer Lin. Abb. ein UVR ist, folgt aus $E_\lambda \subseteq W$ und $E_\mu \subseteq W$ sofort $E_\lambda + E_\mu \subseteq W$.

"$\subseteq$" Sei $w \in W$. Wir suchen eine Darstellung $w = w_\lambda + w_\mu$ mit $w_\lambda \in E_\lambda$ und $w_\mu \in E_\mu$.

Zunächst folgt wegen $((\Phi - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (\Phi - \mu\,\mathrm{id}))(w) = 0$

sofort $\quad x := \Phi(w) - \mu \cdot w \in E_\lambda$

Wegen $(\Phi - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (\Phi - \mu\,\mathrm{id}) = \Phi^2 - \lambda\Phi - \mu\Phi + \lambda\mu\,\mathrm{id} = (\Phi - \mu\,\mathrm{id}) \circ (\Phi - \lambda\,\mathrm{id})$

gilt analog auch

$$0 = (\Phi - \mu\,\mathrm{id}) \circ (\Phi - \lambda\,\mathrm{id})(w) = (\Phi - \mu\,\mathrm{id})(\Phi(w) - \lambda w),$$

also $y := \Phi(v) - \lambda w \in E_\mu$.

Es gilt nun (wegen $\lambda \neq \mu$)

$$w = \frac{1}{\lambda - \mu} x - \frac{1}{\lambda - \mu} y$$

also $w \in E_\lambda + E_\mu$. $\square$