

Aufgabe 2.1

Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom p von A :

$$\begin{aligned} p &= \det(A - X I_4) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1-X & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1-X & 2 \\ -3 & 3 & 0 & 3-X \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow - \\ \downarrow - \\ \uparrow - \\ \downarrow - \end{matrix} = \begin{vmatrix} -X & X & 0 & 0 \\ 2 & 1-X & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1-X & 2 \\ -3 & 3 & 0 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= X \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-X & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1-X & 2 \\ -3 & 3 & 0 & 3-X \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow - \\ \downarrow - \\ \uparrow - \\ \downarrow - \end{matrix} = X \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-X & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1-X & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3-X \end{vmatrix} \quad | \text{Entw.} \\ &= X(3-X) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1-X & -2 \\ 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow + \\ \downarrow - \\ \uparrow + \end{matrix} = X(3-X) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3-X & -2 \\ 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \quad | \text{Entw.} \\ &= X(3-X)(-1) \begin{vmatrix} 3-X & -2 \\ -1 & 1-X \end{vmatrix} = (X^2 - 3X)((3-X)(1-X) - 2) \\ &= (X^2 - 3X)(X^2 - 4X + 1) = X^4 - 7X^3 + 13X^2 - 3X \end{aligned}$$

Wir setzen $q := X^{11} - 3X^{10} - X^3 + 3X^2 + X$. Dann ist $B = q(A)$.

Division von q durch p ergibt

$$q = p \cdot (X^7 + 4X^6 + 15X^5 + 56X^4 + 209X^3 + 780X^2 + 2911X + 10864) + r$$

$$\text{wobei } r = 40544X^3 - 132496X^2 + 32593X$$

Da nach dem Satz von Cayley-Hamilton $p(A) = 0$ gilt, folgt

$$B = q(A) = \underbrace{p(A)}_{=0} \cdot s(A) + r(A) = r(A)$$

Es ergibt sich

$$B = \begin{pmatrix} 316402 & -13775 & -221538 & -191855 \\ 316402 & -13775 & -221538 & -191855 \\ -115808 & 5039 & 81089 & 70226 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$