FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)
4. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie die reelle Jordansche Normalform $\tilde{A}$ der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und geben Sie eine reelle Matrix S an, so dass $\tilde{A} = S^{-1}AS$ gilt.

Aufgabe 2.
Entscheiden Sie, in welchen der folgenden Fälle $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum V ist.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle x, y \rangle := x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 34x_2y_2$

(b) $V = \mathbb{R}[X]$, $\langle p, q \rangle := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ für $p, q \in \mathbb{R}[X]$ mit $p = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k X^k, q = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k X^k$.

(c) $V = \Big\{ (x_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (x_i) \text{ beschränkt} \Big\}$, $\langle (x_i), (y_i) \rangle := \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{x_i y_i}{i^2}$.

(d) $V = C([0,1])$, $\langle f, g \rangle := \int\limits_0^1 f(x)\, dx \cdot \int\limits_0^1 g(x)\, dx$.

Aufgabe 3.
Es seien $n \in \mathbb{N}$ und V der Vektorraum der reellen (n,n)-Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle A, B \rangle := \mathrm{Spur}(A^\top B), \qquad A, B \in V,$$

ein Skalarprodukt auf V definiert ist.

(b) Es seien $\|A\|_0 := \sqrt{\langle A, A \rangle}$, $A \in V$, die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm von A und $\|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$, die Standardnorm von x. Zeigen Sie:

$$\|Ax\| \leq \|A\|_0 \cdot \|x\|, \qquad A \in V, x \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 4. (ohne Abgabe, ohne Korrektur)
Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter, reeller Vektorraum. Die Norm $\|\cdot\|$ erfülle die Parallelogrammgleichung. Zeigen Sie, dass es dann ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V gibt mit

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle \quad \text{für alle} \quad x \in V.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$, $x, y \in V$. Versuchen Sie, die Homogenität bezüglich der Multiplikation mit Skalaren zunächst für ganzzahlige und rationale Skalare zu zeigen.

Abgabe bis Donnerstag, den 12. Mai 2011, 12.00 Uhr.