Lösung zu Aufgabe 4 (4. Übungsblatt)
Wir definieren

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), \quad x, y \in V$$

und zeigen, dass dadurch ein Skalarprodukt auf V gegeben ist. (Dass damit $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ gilt für alle $x \in V$, ist offensichtlich.)
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist positiv definit: $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 > 0$ für $x \neq 0$.
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist symmetrisch:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{4}\Big(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2\Big) = \langle y, x\rangle.$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist linear im 1. Argument:
Additivität: Für $x_1, x_2, y \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle x_1+x_2, y\rangle &= \frac{1}{4}\Big(\|x_1+x_2+y\|^2 - \underbrace{\|x_1+(x_2-y)\|^2}\Big)\\
&\overset{\text{Vor.}}{=} \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\|(x_1+y)+x_2\|^2 + \|x_1-(x_2-y)\|^2} - 2\|x_1\|^2 - 2\|x_2-y\|^2\Big)\\
&\overset{\text{Vor.}}{=} \frac{1}{4}\Big(2\|x_1+y\|^2 + 2\|x_2\|^2 - 2\|x_1\|^2 - 2\|x_2-y\|^2\Big)\\
&= \frac{1}{4}\Big(\|x_1+y\|^2 + \underbrace{\|x_1+y\|^2 - 2\|x_1\|^2 - 2\|y\|^2}_{-\|x_1-y\|^2}\\
&\quad \underbrace{-\|x_2-y\|^2 + 2\|x_2\|^2 + 2\|y\|^2}_{\|x_2+y\|^2} - \|x_2-y\|^2\Big)\\
&= \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle
\end{aligned}$$

Homogenität: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle$ (Rekursion). Für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\langle \frac{n}{m}x, y\rangle = \frac{1}{m}m\langle \frac{n}{m}x, y\rangle = \frac{1}{m}\langle \frac{nm}{m}x, y\rangle = \frac{n}{m}\langle x, y\rangle.$$

Aus $\langle x_1+x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$ folgt weiterhin

$$\langle 0, y\rangle = \langle 0, y\rangle + \langle 0, y\rangle \Rightarrow \langle 0, y\rangle = 0$$

und

$$0 = \langle x-x, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle -x, y\rangle \Rightarrow \langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle.$$

Daher gilt $\langle cx, y\rangle = c\langle x, y\rangle$ für alle $c \in \mathbb{Q}$.
Sei nun $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Folge (a_i) rationaler Zahlen mit $\lim_{i\to\infty} a_i = c$ und es gilt

$$\Big|\|a_ix+y\| - \|cx+y\|\Big| \leq \|(a_ix+y)-(cx+y)\| = |a_i-c|\,\|x\| \xrightarrow{i\to\infty} 0\,,$$

also $\lim_{i\to\infty}\|a_ix+y\| = \|cx+y\|$. Ebenso erhält man $\lim_{i\to\infty}\|a_ix-y\| = \|cx-y\|$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\langle cx, y\rangle &= \frac{1}{4}\Big(\|cx+y\|^2 - \|cx-y\|^2\Big)\\
&= \frac{1}{4}\lim_{i\to\infty}\left(\|a_ix+y\|^2 - \|a_ix-y\|^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\lim_{i\to\infty} 4\langle a_ix, y\rangle\\
&= \lim_{i\to\infty} a_i\langle x, y\rangle\\
&= c\langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

Also ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ linear im 1. Argument und damit wegen der Symmetrie bilinear.