Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Arbeitsgruppe Differentialgeometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)

5. Übungsblatt

Aufgabe 1.

(a) Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite symmetrische Matrix. Zeigen Sie:

$$\det A \le a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn A eine Diagonalmatrix ist.

(b) Es sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix mit den Spalten $x_1, \ldots, x_n$. Zeigen Sie:

$$|\det B| \le \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\|$$

Dabei ist $\|\cdot\|$ die vom Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ induzierte Norm.

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ bezüglich des Standardskalarproduktes paarweise orthogonal sind.

Aufgabe 2.
Auf $\mathbb{R}^3$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ durch

$$\beta_t(x,y) := x^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & t \\ 1 & t & 3 \end{pmatrix} y\,, \quad x, y \in \mathbb{R}^3$$

eine symmetrische Bilinearform gegeben.

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist β_t ein Skalarprodukt?

(b) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die die Vektoren $x = (2, -1, -1)$ und $y = (2, 2, -1)$ bezüglich β_t orthogonal sind.

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich β_1.

Aufgabe 3.
Im $\mathbb{R}^4$ sei durch $\langle x, y\rangle = x^\top A y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 10 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

eine Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erklärt.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V ist.

(b) Bestimmen Sie in dem Untervektorraum

$$U = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}]$$

eine Orthonormalbasis bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Aufgabe 4. (ohne Abgabe, ohne Korrektur)
Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $x_1, \ldots, x_n \in V$ seien linear unabhängig. Weiter gelte für alle $x \in V$:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle^2.$$

Zeigen Sie, dass $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Orthonormalbasis von V ist.
Abgabe bis Donnerstag, den 19. Mai 2011, 12.00 Uhr.