FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

# Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)

## 6. Übungsblatt

**Aufgabe 1.**
Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^5$ (mit Standardskalarprodukt) seien der Untervektorraum $U$ und der Vektor $x$ gegeben durch

$$U = \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right] \text{ und } x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Orthogonalprojektion $\pi(x)$ von $x$ auf $U$ sowie den Abstand $d(x, U)$.

**Aufgabe 2.**
Es seien $V$ ein euklidischer Vektorraum, $U \subset V$ ein Untervektorraum und $\pi : V \to V$ eine Projektion von $V$ auf $U$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\pi$ ist Orthogonalprojektion auf $U$.

(ii) Für alle $x, y \in V$ gilt $\|\pi(x) - \pi(y)\| \leq \|x - y\|$.

(iii) Für alle $x \in V$ gilt $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$.

(iv) Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle \pi(x), y \rangle = \langle x, \pi(y) \rangle$.

**Aufgabe 3.**
Es sei $V = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \text{Grad } p \leq 2\}$. $a, b, c \in \mathbb{R}$ seien fest gewählt.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\langle p, q \rangle := p(a)q(a) + p'(b)q'(b) + p''(c)q''(c)$$

ein Skalarprodukt ist. (Dabei bezeichne $p'$ bzw. $p''$ die erste bzw. zweite Ableitung von $p$.)

(b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $V$ bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(c) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $p := X^2 + 1$ auf $U := [1, X]$ und den Abstand von $p$ zu $U$ .

**Aufgabe 4.** (ohne Abgabe, ohne Korrektur)
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$ und $U := [a_1, \ldots, a_n] \subset \mathbb{R}^m$. $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ seien jeweils mit dem Standardskalarprodukt versehen. Zeigen Sie:

(a) $\forall\, x \in \mathbb{R}^m : \; x \in U^\perp \Leftrightarrow A^\top x = 0$ .

(b) Zu jedem $b \in \mathbb{R}^m$ existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

  (i) $A^\top A x = A^\top b$ ,

  (ii) $\forall\, y \in \mathbb{R}^n : \; \|Ax - b\| \leq \|Ay - b\|$ .

**Abgabe** bis Donnerstag, den 26. Mai 2011, 12.00 Uhr.