Karlsruher Institut für Technologie
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)
7. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Es sei V der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt. Für beliebige $u = (u_1, u_2, u_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in V$ wird das *Vektorprodukt* $u \times w$ definiert durch

$$u \times w := \begin{pmatrix} u_2 w_3 - u_3 w_2 \\ u_3 w_1 - u_1 w_3 \\ u_1 w_2 - u_2 w_1 \end{pmatrix} \in V.$$

(a) Zeigen Sie, dass für beliebige $u, w \in V$ gilt:
   (i) $u \times w = -w \times u$
   (ii) $\|u \times w\| = \|u\| \cdot \|w\| \cdot \sin\alpha$. Dabei ist α der Winkel zwischen u und w.
   (iii) $u \times w \perp [u, w]$

(b) Es seien $g = x_0 + [u], h = y_0 + [w]$ zwei nicht parallele Geraden in V. Beweisen Sie die folgende Formel für den Abstand von g und h:

$$d(g, h) = \frac{|\langle x_0 - y_0, u \times w\rangle|}{\|u \times w\|}.$$

(c) Berechnen Sie den Abstand folgender Geraden im $\mathbb{R}^3$:

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}], \qquad h = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}].$$

Aufgabe 2.
Zeigen Sie, dass es im euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt genau eine Orthogonalprojektion $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit $\dim \operatorname{Bild} \pi = 2$ und

$$\pi(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von π bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 3.
Es seien V ein $n-$dimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ ein selbstadjungierter Endomorphismus von V. Zeigen Sie: Φ hat genau dann n verschiedene Eigenwerte, wenn je zwei $\Phi-$invariante Untervektorräume U_1 und U_2 von V mit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ orthogonal sind.

Aufgabe 4. (ohne Abgabe, ohne Korrektur)
Es seien V ein $n-$dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\Phi, \Psi \in \operatorname{End}(V)$ selbstadjungierte Abbildungen mit

$$\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi.$$

Zeigen Sie, dass es in V eine Orthonormalbasis $(x_1, \ldots, x_n)$ gibt, so dass die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ sowohl Eigenvektoren von Φ als auch von Ψ sind.

Abgabe bis Freitag, den 3. Juni 2011, 12.00 Uhr.