Lösung zu Aufgabe 1 (7. Übungsblatt)

(a) (i) Es gilt

$$u \times w = \begin{pmatrix} u_2w_3 - u_3w_2 \\ u_3w_1 - u_1w_3 \\ u_1w_2 - u_2w_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u_3w_2 - u_2w_3 \\ u_1w_3 - u_3w_1 \\ u_2w_1 - u_1w_2 \end{pmatrix} = -w \times u.$$

(ii) Bekanntlich gilt $\cos\alpha = \frac{\langle u,w\rangle}{\|u\|\,\|w\|}$ für den Winkel α zwischen u und w. Also gilt

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2(\alpha) = 1 - \frac{\langle u, w\rangle^2}{\|u\|^2\|w\|^2},$$

und damit

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha \cdot \|u\|^2\|w\|^2 &= \|u\|^2\|w^2\| - \langle u, w\rangle^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \cdot (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3)^2. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \|u \times w\|^2 &= (u_2w_3 - u_3w_2)^2 + (u_3w_1 - u_1w_3)^2 + (u_1w_2 - u_2w_1)^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \cdot (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3)^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

(iii) Es ist

$$\langle u \times w, u\rangle = u_1(u_2w_3 - u_3w_2) + u_2(u_3w_1 - u_1w_3) + u_3(u_1w_2 - u_2w_3) = 0.$$

$\langle u \times w, w\rangle = 0$ folgt analog oder mit (i).

(b) Da g und h nicht parallel sind, sind u, w lin. unabh. und $\|u \times w\| \neq 0$ (zu ersehen z.B. aus (a)(ii)). Sei $v := \frac{u\times w}{\|u\times w\|}$ und π die Orthogonalprojektion auf $[u, w]^\perp$. $\{v\}$ ist eine ONB in $[u, w]^\perp$ und somit gilt für den Abstand von g und h:

$$d(g, h) = \|\pi(x_0 - y_0)\| = \|\langle x_0 - y_0, v\rangle v\| = |\langle x_0 - y_0, v\rangle|\|v\| = |\langle x_0 - y_0, v\rangle|,$$

da $\|v\| = 1$. Einsetzen von $v = \frac{u\times w}{\|u\times w\|}$ ergibt die Behauptung.

(c) Mit (b) gilt:

$$d(g, h) = \frac{|\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle|}{\| \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \|} = \frac{|-12-4|}{\sqrt{36+25+16}} = \frac{16}{\sqrt{77}}$$

Lösung zu Aufgabe 2 (7. Übungsblatt)

Beh.: Es gibt genau eine Orthogonalprojektion (OP) $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\dim \operatorname{Bild} \pi = 2$ und

$$\pi(\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Es genügt, sich zu überlegen, dass $U := \operatorname{Bild} \pi$ durch die gegebenen Daten schon eindeutig festgelegt ist. Nach Satz 5.8 (Skript S.242) ist dann auch π eindeutig bestimmt (und existiert, da $\dim U = 2 < \infty$).
Ist π OP auf U, so gilt $U^\perp = \operatorname{Kern} \pi$ und $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$. Wegen $\dim U = 2$, folgt $\dim U^\perp = 1$. Zur Bestimmung von $U^\perp$ genügt es also, einen einzigen Vektor von $U^\perp$ zu kennen. π ist OP auf U genau dann, wenn $\pi(x) - x \in U^\perp$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ (vgl. z.B. Bem. S.242 im Skript). Ist also π OP, so gilt

$$\pi(\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}) - \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \in U^\perp.$$

Also ist

$$U^\perp = [\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}] \quad \text{und damit } U = (U^\perp)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 : (-101) \cdot x = 0\} = [\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}]$$

eindeutig bestimmt.

Bestimmung der Abbildungsmatrix von π (bzgl. Standardbasis):

Wir berechnen die Bilder $\pi(e_i)$ der Einheitsvektoren e_i:

$$\pi(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \pi(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\pi(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) + \frac{1}{2}\pi(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \text{ da } \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in U, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \in U^\perp$$

$$\pi(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \text{ da } \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in U$$

$$\pi(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = \pi(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Die Abbildungsmatrix von π ist damit

$$A_\pi = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 3 (7. Übungsblatt)

Da Φ selbstadjungiert ist, gibt es eine ONB aus Eigenvektoren von Φ. Insbesondere ist Φ also diagonalisierbar und $V = E_{c_1} \oplus \ldots \oplus E_{c_k}$, wobei $c_1, \ldots, c_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von Φ sind. Ausserdem gilt $E_{c_i} \perp E_{c_j}$ für $i \neq j$. Wir zeigen nun die zwei Implikationen der behaupteten Äquivalenz separat:

„$\Rightarrow$“: Hat Φ n verschiedene Eigenwerte, so ist $\dim E_{c_i} = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Seien U_1, U_2 zwei Φ-invariante Unterräume mit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Dann ist $\Phi\big|_{U_1}$ selbstadjungiert, denn $\langle \Phi(u), u' \rangle = \langle u, \Phi(u') \rangle$ für alle $u, u' \in U_1$, wobei $\Phi(u), \Phi(u')$ wegen der Φ-Invarianz von U_1 wieder in U_1 sind. Somit existiert in U_1 eine ONB $(x_1, \ldots, x_l)$ aus Eigenvektoren von $\Phi\big|_{U_1}$ (und damit aus Eigenvektoren von Φ). Analog existiert eine ONB $(y_1, \ldots, y_m)$ von U_2 aus Eigenvektoren von Φ. Wegen $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ sind die x_i und y_j paarweise linear unabhängig und wegen $\dim E_{c_i} = 1$ sind die x_i und y_j Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten. Also gilt $x_i \perp y_j$ für alle i, j, woraus $U_1 \perp U_2$ folgt.

„$\Leftarrow$“: Angenommen es existiert ein Eigenwert c mit $\dim E_c \geq 2$. Dann gibt es Vektoren $x, y \in E_c$, die linear unabhängig sind. Insbesondere sind damit $[x]$, $[y]$ und auch $[x-y]$ Φ-invariante Unterräume mit $[x] \cap [y] = \{0\}$ und $[x-y] \cap [y] = \{0\}$. Nach Voraussetzung folgt daraus $x \perp y$ und $x - y \perp y$ und somit

$$\langle y, y \rangle = \langle x - (x-y), y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x - y, y \rangle = 0,$$

d.h., $y = 0$, ein Widerspruch. Also gilt $\dim E_{c_i} = 1$ für alle $i = 1, \ldots, k$ und wegen $V = E_{c_1} \oplus \ldots \oplus E_{c_k}$ gibt es somit genau $k = n$ Eigenwerte.

Lösung zu Aufgabe 4 (7. Übungsblatt)

Da Φ selbstadjungiert ist, gibt es eine ONB aus Eigenvektoren von Φ. Insbesondere ist Φ also diagonalisierbar und $V = E_{c_1} \oplus \ldots \oplus E_{c_k}$, wobei $c_1, \ldots, c_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von Φ sind. Ausserdem gilt $E_{c_i} \perp E_{c_j}$ für $i \neq j$.

Sei $x \in E_{c_i}$. Dann gilt $\Phi(x) = c_i x$ und somit nach Voraussetzung

$$\Phi(\Psi(x)) = \Psi \circ \Phi(x) = \Psi(c_i x) = c_i \Psi(x),$$

d.h., $\Psi(x) \in E_{c_i}$. Also ist E_{c_i} Ψ-invariant.
Damit ist aber $\Psi\big|_{E_{c_i}}$ selbstadjungiert für $i = 1, \ldots, k$, und es gibt eine ONB B_i in E_{c_i} aus Eigenvektoren von Ψ (die wegen $B_i \subset E_{c_i}$ auch Eigenvektoren von Φ sind). Aus der paarweisen Orthogonalität der Eigenräume E_i ergibt sich sofort, dass $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$ eine ONB von V aus gemeinsamen Eigenvektoren von Ψ und Φ ist wie gewünscht.