Karlsruher Institut für Technologie

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)

8. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Eine Isometrie Φ eines vierdimensionalen euklidischen Vektorraums V habe bezüglich einer Orthonormalbasis $B = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ von V die Abbildungsmatrix

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4\sqrt{3} & 3\sqrt{3} & 4 \\ 4\sqrt{3} & -3 & -4 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -4 & 3 & -4\sqrt{3} \\ 4 & 3\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform $\widetilde{A}$ von Φ.

(b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis $\widetilde{B}$ von V, bezüglich der Φ die Abbildungsmatrix $\widetilde{A}$ hat.

(c) Geben Sie eine orthogonale $(4,4)-$Matrix S mit $\widetilde{A} = S^\top A\, S$ an.

Aufgabe 2.
Für eine Matrix $A \in SO(3)$ gelte

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für die durch A beschriebene Drehung Φ im $\mathbb{R}^3$ die Drehachse, die Drehebene, den Drehwinkel (vgl. S. 262 im Skript) sowie die Normalform $\widetilde{A}$. Geben Sie außerdem eine orthogonale Matrix T an, die $\tilde{A} = T^\top AT$ erfüllt.

Aufgabe 3.
Es sei Φ ein Automorphismus eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraums V, und Φ^* sei die Adjungierte zu Φ. Zeigen Sie:

(a) Die beiden linearen Abbildungen $\Phi^* \circ \Phi$ und $\Phi \circ \Phi^*$ sind selbstadjungiert und haben nur positive Eigenwerte.

(b) $\Phi^* \circ \Phi$ und $\Phi \circ \Phi^*$ haben dieselben Eigenwerte.

(c) Es gibt eine Isometrie Ψ von V mit $\Psi^* \circ \Phi^* \circ \Phi \circ \Psi = \Phi \circ \Phi^*$.

Aufgabe 4. (ohne Abgabe, ohne Korrektur)
Es seien V und W euklidische Vektorräume und $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) Für alle $x, y \in V$ gilt $x \perp y \Rightarrow \Phi(x) \perp \Phi(y)$.

(ii) Für alle $x, y \in V$ gilt $\|x\| = \|y\| \Rightarrow \|\Phi(x)\| = \|\Phi(y)\|$.

(iii) Es gibt eine reelle Zahl $c \geq 0$, so dass für alle $x \in V$ gilt $\|\Phi(x)\| = c\|x\|$.

(iv) Φ ist die Nullabbildung, oder es gibt eine Isometrie $\Psi : V \to W$ und eine reelle Zahl $c > 0$ mit $\Phi = c\,\Psi$.

Abgabe bis Donnerstag, den 9. Juni 2011, 12.00 Uhr.