FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)
9. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Es seien V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $\Phi \in \text{End}(V)$. Zeigen Sie:

(a) Φ ist genau dann selbstadjungiert, wenn Φ normal ist und alle Eigenwerte von Φ reell sind.

(b) Φ ist genau dann antiselbstadjungiert, wenn Φ normal ist und alle Eigenwerte von Φ imaginär sind.

(c) Φ ist genau dann Isometrie, wenn Φ normal ist und alle Eigenwerte von Φ den Betrag 1 haben.

(d) Gibt es ein $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, mit $\Phi^* = \Phi^k$ und ist Φ bijektiv, so ist Φ eine Isometrie.

Aufgabe 2.
Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Φ ein Endomorphismus von V mit der Eigenschaft

$$\langle v, \Phi(v) \rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

Zeigen Sie:

(a) Für jeden zweidimensionalen Untervektorraum U von V mit $\Phi(U) \subset U$ und für jede ONB (b_1, b_2) von U gibt es eine reelle Zahl a, so dass $\Phi(b_1) = ab_2$ und $\Phi(b_2) = -ab_1$.

(b) In der Situation von Teil (a) ist der Betrag von a von der Wahl der Basis in U unabhängig.

(c) $-\Phi$ ist der zu Φ adjungierte Endomorphismus, und Φ ist normal.

Aufgabe 3.
Es sei Φ ein normaler, nicht injektiver Endomorphismus des euklidischen Standardvektorraums $\mathbb{R}^3$ mit

$$\Phi(\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]) \subset \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \quad \text{und} \quad \Phi(\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -33 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es eine ONB von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von Φ gibt. Geben Sie ein solche ONB und die zugehörige Abbildungsmatrix an.

Aufgabe 4. (ohne Abgabe, ohne Korrektur)
Es seien V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und Φ ein normaler Endomorphismus von V. Ferner seien ein Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ gegeben mit $p(\Phi) = O$ sowie ein weiteres Polynom $q \in \mathbb{C}[X]$, für das $|q(c)| = 1$ gilt für jede Nullstelle $c \in \mathbb{C}$ von p.

Zeigen Sie, dass $q(\Phi)$ eine Isometrie von V ist.

Abgabe bis Donnerstag, den 16. Juni 2011, 12.00 Uhr.