Karlsruher Institut für Technologie

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)
10. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Im unitären Vektorraum $\mathbb{C}^4$ sei ein Endomorphismus Φ durch die Matrix

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4+5i & -4-4i & 0 & -2-2i \\ -4-4i & -5+4i & -2-2i & 0 \\ 0 & -2-2i & -4+5i & 4+4i \\ -2-2i & 0 & 4+4i & -5+4i \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von Φ und zeigen Sie, dass Φ normal ist.

(b) Geben Sie eine unitäre Matrix S an, so dass $\bar{S}^\top A\, S$ Diagonalform besitzt.

Aufgabe 2.
Es sei L eine nichtleere Teilmenge eines affinen Raums $\mathbb{A}$ über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie:

(a) Enthält L mit je drei Punkten P_0, P_1, P_2 stets auch deren affine Hülle, so ist L ein affiner Unterraum von $\mathbb{A}$.

(b) Enthält L mit je zwei verschiedenen Punkten P_0 und P_1 stets auch deren Verbindungsgerade P_0P_1 und gilt $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$, so ist L ein affiner Unterraum von $\mathbb{A}$.

(c) In (b) kann auf die Voraussetzung $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$ nicht verzichtet werden.

Aufgabe 3.
Es seien g und h zwei windschiefe Geraden in einem 3-dimensionalen affinen Raum $\mathbb{A}$. Geben Sie alle Punkte in $\mathbb{A}$ an, durch die keine Gerade geht, die g und h trifft.

Aufgabe 4. (ohne Abgabe, ohne Korrektur)
Beweisen Sie die in der Vorlesung angegebenen Reflexionseigenschaften von Hyperbeln und Parabeln:

(a) An einer Hyperbel H wird ein Lichtstrahl, der von einem ihrer Brennpunkte f ausgeht, so reflektiert, dass er auf der Geraden verläuft, die durch den Reflexionspunkt und den zweiten Brennpunkt f' aufgespannt wird.

(b) An einer Parabel P wird ein von ihrem Brennpunkt f ausgehender Lichtstrahl so reflektiert, dass er parallel zur Parabelachse verläuft.

Abgabe bis Freitag, den 24. Juni 2011, 12.00 Uhr.