

Lösung zu Aufgabe 1 (10. Übungsblatt)

$$(a) \det(A - XE_4) = \det(\frac{1}{9}(9A - 9XE_4)) = (\frac{1}{9})^4 \det(9A - 9XE_4)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{9}\right)^4 \left| \begin{array}{cccc} -4+5i-9X & -4-4i & 0 & -2-2i \\ -4-4i & -5+4i-9X & -2-2i & 0 \\ 0 & -2-2i & -4+5i-9X & 4+4i \\ -2-2i & 0 & 4+4i & -5+4i-9X \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \overbrace{\quad}^2 \quad \overbrace{\quad}^2 \\ \leftarrow + \quad \leftarrow + \\ \overbrace{\quad}^2 \quad \overbrace{\quad}^2 \\ \leftarrow + \quad \leftarrow + \end{array} \right| \\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^4 \left| \begin{array}{cccc} -4+5i-9X & -4-4i & 0 & -2-2i \\ -4-4i & -5+4i-9X & -2-2i & 0 \\ 18i-18X & -18i+18X & 9i-9X & 0 \\ -18-18X & -18-18X & 0 & -9-9X \end{array} \right| \quad (*) \\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^2 (i-X)(-1-X) \left| \begin{array}{cccc} -4+5i-9X & -4-4i & 0 & -2-2i \\ -4-4i & -5+4i-9X & -2-2i & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \overbrace{\quad}^+ \\ \leftarrow + \\ \overbrace{\quad}^{2+2i} \\ \overbrace{\quad}^{2+2i} \end{array} \right| \\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^2 (i-X)(-1-X) \left| \begin{array}{cc} 9i-9X & 0 \ 0 \\ 0 & -9-9X \ 0 \ 0 \\ 2 & -2 \ 1 \ 0 \\ 2 & 2 \ 0 \ 1 \end{array} \right| \\
&= (i-X)^2(-1-X)^2.
\end{aligned}$$

Die EW sind also $c_1 = i, c_2 = -1$. Setzt man in der Matrix in der Zeile $(*)$ $X = i$ bzw. $X = -1$, so ergeben sich die Eigenräume als Lösung des zugehörigen homogenen LGS:

$$\begin{aligned}
E_i : \begin{pmatrix} -4-4i & -4-4i & 0 & -2-2i \\ -4-4i & -5-5i & -2-2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18-18i & -18-18i & 0 & -9-9i \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1-i & -2-2i & 2+2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_i = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right]. \\
E_{-1} : \begin{pmatrix} 5+5i & -4-4i & 0 & -2-2i \\ -4-4i & 4+4i & -2-2i & 0 \\ 18+18i & -18-18i & 9+9i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -5/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow E_{-1} = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].
\end{aligned}$$

Durch Nachrechnen sieht man $E_i \perp E_{-1}$, d.h. die obigen Vektoren bilden (nach Normierung) eine ONB von $\mathbb{C}^4$ aus EV von A . $\implies$ Nach Satz 5.17 ist Φ normal.

(b) Nach (a) ist die Matrix

$$S := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ unitär und es gilt } \bar{S}^\top AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 2 (10. Übungsblatt)

(a) Sei $O \in L$. Zu zeigen: $U := \{\overrightarrow{OX} \mid X \in L\}$ ist Untervektorraum von V .

$0 \in U$, da $\overrightarrow{OO} = 0$.

Seien $a, b \in \mathbb{K}$, $x, y \in U \Rightarrow \exists X, Y \in L : \overrightarrow{OX} = x, \overrightarrow{OY} = y$.

Die affine Hülle $\bar{L} := O \vee X \vee Y$ habe den Richtungsraum $\bar{U}$. Da $x, y \in \bar{U}$, folgt $ax + by \in \bar{U}$.

$\Rightarrow \exists P \in \bar{L} : \overrightarrow{OP} = ax + by$

$\Rightarrow$ Da $\bar{L} \subset L$ nach Vor., folgt $P \in L$ und $ax + by \in U$. Also ist U ein Untervektorraum.

(b) Sei $O \in L$, $U = \{\overrightarrow{OX} \mid X \in L\}$.

$0 \in U$, da $\overrightarrow{OO} = 0$.

Wir zeigen zunächst:

$$\forall x, y \in U, \forall a \in \mathbb{K} : (1-a)x + ay \in U. \quad (*)$$

Für $x = y$ ist die Beh. trivial. Sei also $x \neq y$.

$\Rightarrow \exists X, Y \in L, X \neq Y : \overrightarrow{OX} = x, \overrightarrow{OY} = y$

$\Rightarrow$ Für die Gerade XY gilt nach Vor. $XY \subset L$ und ihr Richtungsraum ist $U_{XY} = [\overrightarrow{XY}]$.

Sei $P \in \mathbb{A}$, so dass $\overrightarrow{OP} = (1-a)x + ay$. Dann gilt $\overrightarrow{OP} = (1-a)\overrightarrow{OX} + a\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OX} + a\overrightarrow{XY}$.

$\Rightarrow P \in XY \subset L$ und somit $\overrightarrow{OP} \in U$. Damit ist $(*)$ gezeigt.

Mit $(*)$ folgt nun sofort: $\forall y \in U, \forall c \in \mathbb{K} : cy \in U$ (setze $x := 0 \in U$).

Bleibt noch zu zeigen: $\forall x, y \in U : x + y \in U$.

Ist $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$, dann gibt es ein $c \notin \{0, 1\}$ und es gilt $x + y = (1-c)(\frac{1}{1-c}x) + c(\frac{1}{c}y)$. Da $\frac{1}{1-c}x, \frac{1}{c}y \in U$, folgt mit $(*)$ $x + y \in U$.

(c) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ und $\mathbb{A} := \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ die affine Ebene über $\mathbb{F}_2$. Setze $L = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$. Für $X, Y \in L$ gilt $X \vee Y = \{X, Y\}$ ($\{X, Y\} \subset X \vee Y$ und $\{X, Y\}$ ist affiner Unterraum von $\mathbb{A}$). Die Vor. von (b) ist also für L erfüllt.

Wäre L affiner UR von $\mathbb{A}$, so müsste für $O = (0, 0)$ die Menge $U = \{\overrightarrow{OX} : X \in L\} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ ein UVR sein, was aber nicht der Fall ist, da $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ nicht in U liegt.

Aufgabe 3 (10. Übungsblatt)

Sei M die Menge der Punkte, durch die keine Gerade geht, die g und h trifft.

Seien $g = G + U$, $h = H + U'$, d.h. G, H Aufpunkte und U, U' die Richtungsräume von g bzw. h , $W := U + U'$ ($\dim W = 2$, da g und h windschief),

$E := G + W$, $E' := H + W$ die Ebenen parallel zu W , die g bzw. h enthalten.

Beh: $M = (E \setminus g) \cup (E' \setminus h)$

Beweis: Sei $X \in E \setminus g$ (analog für $X \in E' \setminus h$) und ℓ eine ^{beliebige} Gerade durch X , die g trifft. Dann liegt ℓ in $X \vee g = E$ und wegen $E \parallel E'$ und $h \subset E'$ hat ℓ keinen Schnittpunkt mit h .

Also ex. keine Gerade durch X , die g und h trifft. $\Rightarrow X \in M$

Sei nun $X \notin (E \setminus g) \cup (E' \setminus h)$.

1. Fall: $X \in g$ (bzw. $X \in h$ analog). Wähle einen beliebigen Punkt $Y \in h$. Dann ist XY eine Gerade, die g und h trifft. $\Rightarrow X \notin M$.

2. Fall: $X \notin E \cup E'$. Setze $L := X \vee g$. Da $X \notin g$, ist L eine Ebene. L ist nicht parallel zu h . (Angenommen $L \parallel h \Rightarrow U' \subset U_L$ (U_L Richt.raum von L)). Wegen $g \subset L$ gilt auch $U \subset U_L$, also $U + U' \subset U_L$. Da g und h windschief sind, folgt $U_L = U + U' = W$, d.h. $L = E$ im Wid. zur Vor.)

$\Rightarrow L \cap h \neq \emptyset$ (Dimensionen!)

$\Rightarrow$ Es ex. ein Punkt $P \in L \cap h$. $\Rightarrow$ Die Gerade XP trifft g und h .

$\Rightarrow X \notin M$

□

Lösung zu Aufgabe 4 (10. Übungsblatt)

(a) Es seien $F = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, $F' = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ die Brennpunkte der Hyperbel

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

(mit den Halbachsen $a, b > 0$
und $c = \sqrt{a^2 + b^2}$)

Sei $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ein bel. Punkt auf H ,
und T die Tangente an H in P .

Beh: Der Winkel β zwischen den Geraden FP und T
stimmt mit dem Winkel α zwischen $F'P$ und T
überein, d.h. $\alpha = \beta$.

Zu zeigen ist also, dass T die Winkelhalbierende des
Winkels $\angle FPF'$ ist.

Dazu g.z.z.: Die Winkelhalbierende W von $\angle FPF'$ und T haben denselben Anstieg.

Der Anstieg von T ist geg. durch die Ableitung ^{in x_0} der Funktion $h: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $x \mapsto \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, die den "positiven Ast" der Hyperbel beschreibt (für "negative"
Ast analog):

$$h'(x) = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad \Rightarrow \quad m_T = h'(x_0) = \frac{b}{a} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - a^2}}$$

Zur Bestimmung der Winkelhalbierenden W sei $Q = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix}$ der Punkt auf $\overline{PF'}$,
der von P gerade den Abstand $d(F, P)$ hat, weiter sei M der Mittelpunkt
der Strecke $\overline{QF}$. Dann gilt: $M = \frac{Q+F}{2}$ und M liegt auf W .

Wir bestimmen zunächst $M = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$ und dazu Q : Wegen der Beziehung
 $|d(F', P) - d(F, P)| = 2a$, gilt $d(F', Q) = 2a$ und deshalb $Q = F' + 2a \frac{\overrightarrow{F'P}}{\|\overrightarrow{F'P}\|}$.

Somit

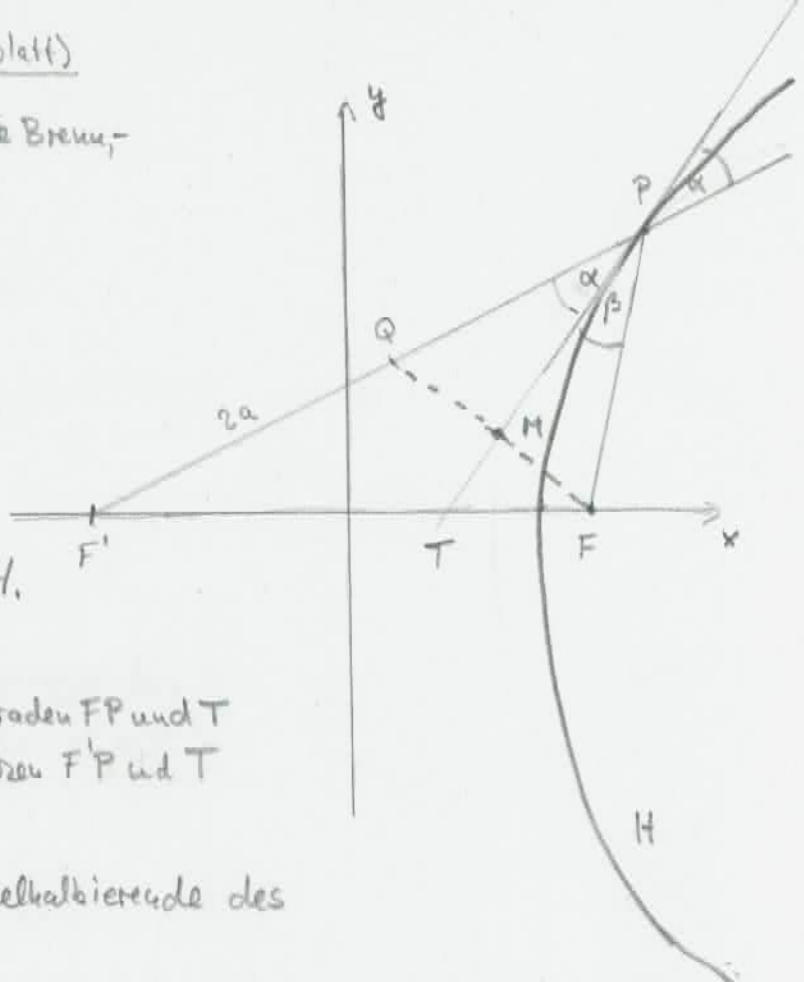
$$M = \frac{Q+F}{2} = \underbrace{\frac{F'+F}{2}}_{=0} + \frac{a}{\|\overrightarrow{F'P}\|} \overrightarrow{F'P} = \frac{a}{\|\overrightarrow{F'P}\|} \overrightarrow{F'P}$$

wobei

$$\overrightarrow{F'P} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + c \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{b}{a} \sqrt{x_0^2 - a^2},$$

$$\|\overrightarrow{F'P}\| = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} = \dots = \frac{cx_0}{a} + a = \frac{cx_0 + a^2}{a},$$

also $M = \frac{a^2}{cx_0 + a^2} \begin{pmatrix} x_0 + c \\ y_0 \end{pmatrix}.$



Der Anstieg m_W von W ist dann

$$\begin{aligned} m_W &= \frac{y_0 - y_M}{x_0 - x_M} = \frac{y_0 - \frac{a^2}{cx_0 + a^2} y_0}{x_0 - \frac{a^2}{cx_0 + a^2} (x_0 + c)} = \frac{(1 - \frac{a^2}{cx_0 + a^2}) y_0}{(1 - \frac{a^2}{cx_0 + a^2}) x_0 - \frac{a^2 c}{cx_0 + a^2}} \\ &= \frac{cx_0 y_0}{cx_0^2 - a^2 c} = \frac{x_0 y_0}{x_0^2 - a^2} = \frac{x_0 \frac{b}{a} \sqrt{x_0^2 - a^2}}{x_0^2 - a^2} = \frac{b}{a} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - a^2}} \end{aligned}$$

Also gilt $m_W = m_T$ und somit $\alpha = \beta$ $\square$

(b) Wir wählen den Ursprung im Scheitel der Parabel P . Dann ist P durch den Graphen der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax^2$$

beschrieben (mit o.B.d.A. $a > 0$).

Sei F der Brennpunkt von P

und L die Leitgerade. Sei $Q = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in P$ bel.

Es gilt: $F = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ und $d(F, Q) = d(Q, L)$

Die Leitgerade ist dabei geg. durch $L: y = -c$, verläuft also parallel zur x -Achse.

Beh: Der Winkel α zwischen den Geraden FQ und T (Tangente an P im Punkt Q) stimmt mit dem Winkel β zwischen den Geraden RQ und T überein. Dabei ist R der Fußpunkt des Lotes von Q auf L .

Zu zeigen ist wieder, dass die Steigung m_T der Tangente mit der Steigung m_W des Winkelhalbierenden des Winkels $\angle RQF$ übereinstimmt.

Die Steigung von T ist wieder der Wert der Ableitung von f in x_0 :

$$f'(x) = 2ax \Rightarrow m_T = f'(x_0) = 2ax_0.$$

Wegen $d(F, Q) = d(Q, R)$ liegt $M := \frac{F+R}{2}$ auf W . Da $R = \begin{pmatrix} x_0 \\ -c \end{pmatrix}$, ergibt sich

$$M = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ -c \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den Anstieg von W gilt also

$$m_W = \frac{y_0 - y_M}{x_0 - x_M} = \frac{y_0}{x_0 - \frac{1}{2}x_0} = \frac{ay_0^2}{\frac{1}{2}x_0} = 2ax_0.$$

Also gilt $m_T = m_W$ und damit $\alpha = \beta$ $\square$

