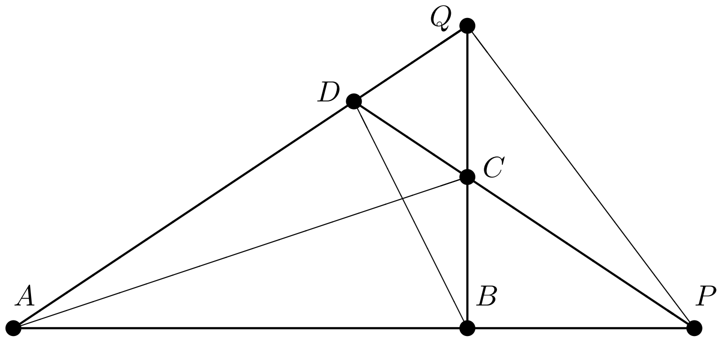
Karlsruher Institut für Technologie
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)

11. Übungsblatt



Aufgabe 1.
Ein Quadrupel (A, B, C, D) von Punkten der reellen affinen Ebene heißt *vollständiges Viereck*, falls keine 3 der 4 Punkte A, B, C, D kollinear sind und die Geraden AB und CD bzw. BC und DA sich in den Punkten P bzw. Q schneiden. Die Strecken $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ und $\overline{PQ}$ heißen *Diagonalen* des vollständigen Vierecks.
Zeigen Sie:
Die Mittelpunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierecks (A, B, C, D) liegen auf einer Geraden, der sogenannten *Gauß-Geraden*.

Aufgabe 2.
Ein vierdimensionaler reeller affiner Raum $\mathbb{A}$ sei mit einem affinen Koordinatensystem $(O; b_1, \ldots, b_4)$ versehen. Weiter sei L_1 die affine Hülle der Punkte $P_0(-4, -2, 3, 1)$, $P_1(-3, -1, 2, 0)$, $P_2(1, -2, 4, 3)$ und L_2 der durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 9x_4 & = & 6\ , \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

bestimmte affine Unterraum. Berechnen Sie

(a) von L_1 und $L_1 \cap L_2$ jeweils eine Parameterdarstellung erster Art,
(b) von L_2 eine Parameterdarstellung zweiter Art,
(c) ein lineares Gleichungssystem, das den Verbindungsraum von L_1 und L_2 darstellt.

Aufgabe 3.
Es seien $\mathbb{A}$ ein affiner Raum über dem Körper $\mathbb{K}$, $P_0, \ldots, P_k, X \in \mathbb{A}$ und C eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{A}$. Zeigen Sie:

(a) X ist genau dann Affinkombination von $P_0, \ldots, P_k$, wenn es $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ gibt mit $a_0 + \ldots + a_k = 1$ und
$$a_0\overrightarrow{XP_0} + \ldots + a_k\overrightarrow{XP_k} = 0.$$

(b) Sind die Punkte $P_0, \ldots, P_k$ affin unabhängig, so ist X genau dann Affinkombination von $P_0, \ldots, P_k$, wenn die Punkte $P_0, \ldots, P_k, X$ affin abhängig sind.

(c) Die affine Hülle von C ist die Menge aller Affinkombinationen aus C.

Aufgabe 4. (ohne Abgabe, ohne Korrektur)
Seien $\mathbb{A}$ ein affiner Raum über einem Körper $\mathbb{K}$, dessen Charakteristik $\neq 2$ ist, und $A, B, C, D \in \mathbb{A}$ so, dass keine drei der vier Punkte auf einer Geraden liegen. Zeigen Sie:

(a) Das Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Parallelogramm (d.h. $AB||CD$ und $AD||BC$), wenn die Mittelpunkte der Diagonalen übereinstimmen.

(b) Die Seitenmittelpunkte des Vierecks $ABCD$ bilden ein Parallelogramm.

Abgabe bis Donnerstag, den 30. Juni 2011, 12.00 Uhr.