

Lösung zu Aufgabe 2 (11. Übungsblatt)

(a) Parameterdarstellung 1. Art von L_1 :

$$\begin{aligned}x &= \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP_0} + a_1 \overrightarrow{P_0P_1} + a_2 \overrightarrow{P_0P_2} \\&= (-4b_1 - 2b_2 + 3b_3 + b_4) + a_1(b_1 + b_2 - b_3 - b_4) + a_2(5b_1 + b_3 + 2b_2).\end{aligned}$$

Mit Koordinatenvektoren kann man kürzer schreiben:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Parameterdarstellung 1. Art von $L_1 \cap L_2$:

Setzt man die obige Darstellung für den Koordinatenvektor $\hat{x}$ von L_1 in die Gleichungen für L_2 ein, so ergeben sich Bestimmungsgleichungen für die Parameter a_1, a_2 :

$$\begin{aligned}3(-4 + a_1 + 5a_2) - (-2 + a_1) + 4(3 - a_1 + a_2) - 9(1 - a_1 + 2a_2) &= 6 \\(-4 + a_1 + 5a_2) + 3(-2 + a_1) - 2(3 - a_1 + a_2) - (1 - a_1 + 2a_2) &= -4\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow 7a_1 + a_2 = 13 \Rightarrow a_2 = -7a_1 + 13$ Der Schnitt $L_1 \cap L_2$ ist also eine Gerade mit der Darstellung

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + (13 - 7a_1) \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 \\ -2 \\ 16 \\ 27 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} -34 \\ 1 \\ -8 \\ -15 \end{pmatrix}, \quad a_1 \in \mathbb{R}$$

(b) Parameterdarstellung 2. Art von L_2 :

Die Koordinatenvektoren $\hat{x}$ von Punkten in L_2 sind Lösungen des LGS $A\hat{x} = b$ mit

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 4 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & -4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & 9 \end{array} \right)$$

Daraus ergibt sich zunächst $\dim L_2 = 2$. Wir wählen 3 Punkte in L_2 in allg. Lage, etwa

$$Q_0(-7, 0, 0, -3), Q_1(7, -3, 0, 2), Q_2(6, -2, 1, 2)$$

Dann ergibt sich als Darstellung für L_2 :

$$\hat{x} = a_0 \overrightarrow{OQ_0} + a_1 \overrightarrow{OQ_1} + a_2 \overrightarrow{OQ_2} = a_0 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_0 + a_1 + a_2 = 1.$$

(c) LGS für $L_1 \vee L_2$:

Aus (a) folgt $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset \Rightarrow \dim(L_1 \vee L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) = 3$
 $\Rightarrow L_1 \vee L_2$ ist Hyperebene in $\mathbb{A}$.

Für den Richtungsraum U von $L_1 \vee L_2$ gilt:

$$U = U_{L_1} + U_{L_2} = [\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}].$$

Wir stellen U als Lösungsmenge eines homogenen LGS dar:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 14 & -3 & 0 & 5 \\ 13 & -2 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{c} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 0 & 1 \\ 14 & -3 & 0 & 5 \\ 14 & -1 & 0 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{c} \leftarrow +^3 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
 & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 0 & 1 \\ 32 & 0 & 0 & 8 \\ 20 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{c} \leftarrow + \\ | : 8 \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 \text{Lösung: } & \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right].
 \end{aligned}$$

Also ist U durch folgende lineare Gleichung beschrieben: $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0$.
LGS für $L_1 \vee L_2$: $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = b$. Einsetzen von P_0 liefert $b = 5$. Also

$$L_1 \vee L_2 : x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5.$$

(Dabei sind die x_i die Koordinaten der Punkte von $L_1 \vee L_2$ bezüglich $(O; b_1, \dots, b_4)$!)

Aufgabe 4 (11. Blatt)

(a) ABCD Parallelogramm $\Leftrightarrow$

Mittelpunkte der Diag. stimmen überein

" $\Rightarrow$ " Angen. ABCD Parallelogramm $\Rightarrow AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$

$$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \text{ und } \vec{AD} = \vec{BC} \quad (*)$$

(Beweis: $AB \parallel CD \Rightarrow \vec{DC} = a \vec{AB}$ für ein $a \in \mathbb{K}$, analog folgt aus $AD \parallel BC$:
 $\vec{AD} = b \vec{BC}$ für ein $b \in \mathbb{K}$

$$\text{Es gilt: } \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC} = b \vec{BC} + a \vec{AB}$$

$$\Rightarrow (1-a) \vec{AB} + (1-b) \vec{BC} = \vec{0}$$

Da A, B, C nicht koll. aff. unabh., sind $\vec{AB}$ und $\vec{BC}$ lin. unabh.

$$\Rightarrow (1-a) = (1-b) = 0 \Rightarrow a = b = 1 \text{ d.h. } (*)$$



Sei M_1 Mittelpunkt von AC und M_2 MP. von B, D. (z.z.: $M_1 = M_2$, d.h. $\vec{AM}_1 = \vec{AM}_2$)

$$\vec{AM}_1 = \frac{1}{2} \vec{AC} \text{ und } \vec{AM}_2 = \frac{1}{2} \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{AB}$$

Wegen $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ folgt die Beh.: $\vec{AM}_1 = \vec{AM}_2$.

" $\Leftarrow$ " Angen. die MP der Diagonalen (AC bzw. DB) stimmen überein. Der gemeinsame

Punkt sei O. Dann gilt: $\vec{OA} = -\vec{OC}$ und $\vec{OB} = -\vec{OD}$

(z.z.: $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$)

Es ist

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC} - \vec{OD} = \vec{OD} + \vec{OC} = \vec{DC}$$

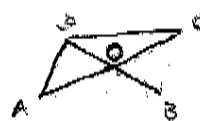
$$\Rightarrow AB \parallel DC$$

Analog

$$\vec{AD} = \vec{AO} + \vec{OD} = \dots = \vec{BC}$$

$$\Rightarrow AD \parallel BC$$

} $\Rightarrow$ ABCD Parallelogramm.



(b) Für die Ortsvektoren $\vec{OS}_i$ der Seitenmittelpunkte $S_1, \dots, S_4$ der Seiten

AB, BC, CD, DA gilt:

$$\vec{AS}_1 = \frac{1}{2} \vec{AB}, \vec{BS}_2 = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC}, \vec{CS}_3 = \frac{1}{2} \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{AC}, \vec{AS}_4 = \frac{1}{2} \vec{AD}$$

Seien M_1 und M_2 die Seitenmittelpunkte der Seiten S_1S_3 und S_2S_4

(d.h. der Diagonalen von $S_1S_2S_3S_4$).

Wir zeigen: $\vec{AM}_1 = \vec{AM}_2$, d.h. $M_1 = M_2$

$$\text{Es gilt: } \vec{AM}_1 = \frac{1}{2} \vec{AS}_1 + \frac{1}{2} \vec{AS}_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{AC} \right)$$

$$\vec{AM}_2 = \frac{1}{2} \vec{AS}_2 + \frac{1}{2} \vec{AS}_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{AD} \right) = \vec{AM}_1$$

$\Rightarrow M_1 = M_2 \Rightarrow$ wegen (a) ist $S_1S_2S_3S_4$ ein Parallelogramm. $\square$

