Karlsruher Institut für Technologie
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)
12. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Im $\mathbb{R}^4$ seien die Punkte

$$x_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\3\end{pmatrix}, x_2 := \begin{pmatrix}3\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, x_3 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, x_4 := \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\3\end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix}3\\2\\0\\3\end{pmatrix}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die affine Hülle $L = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ der Punkte $x_1, \ldots, x_4$ eine Hyperebene ist, und bestimmen Sie den Abstand $d(y, L)$ von y zu L sowie einen Punkt $z \in L$ mit $d(y, L) = d(y, z)$.

Aufgabe 2.
Es seien $\mathbb{A}$ ein $n-$dimensionaler reeller affiner Raum und φ eine Affinität von $\mathbb{A}$ mit zugehöriger linearer Abbildung Φ. Ferner sei 1 nicht Eigenwert von Φ. Zeigen Sie:

(a) φ besitzt genau einen Fixpunkt.

(b) Ist n ungerade, so besitzt φ mindestens eine Fixgerade.

(c) Für $\mathbb{A} = \mathbb{R}^3$ und $a \in \mathbb{R}$ sei eine affine Abbildung $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax_1 + x_3 + 3 \\ (a-1)x_2 + x_3 + 2 \\ 2x_3 + 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ derart, dass φ genau einen Fixpunkt und genau zwei Fixgeraden besitzt.

Aufgabe 3.
Es sei H eine Hyperebene eines n-dimensionalen euklidischen Raums $\mathbb{A}$ und φ eine Selbstabbildung von $\mathbb{A}$. φ heißt Hyperebenenspiegelung an H, wenn für jeden Punkt $X \in \mathbb{A}$ der Lotfußpunkt von X auf H gleich dem Mittelpunkt von X und $\varphi(X)$ ist.

Aufgabe 4. (ohne Abgabe, ohne Korrektur)
Es seien $\mathbb{A}$ ein $n-$dimensionaler affiner Raum $(n > 2)$ und φ eine von der Identität verschiedene Affinität von $\mathbb{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) φ besitzt einen Fixpunkt $O \in \mathbb{A}$.

(ii) Für je zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{A}$, die keine Fixpunkte sind, ist die Verbindungsgerade $P\varphi(P)$ parallel zur Verbindungsgeraden $Q\varphi(Q)$.

Zeigen Sie:
φ ist eine axiale Affinität, d.h. es gibt eine Hyperebene $H \subset \mathbb{A}$, die unter φ punktweise fest bleibt.

Abgabe bis Donnerstag, den 7. Juli 2011, 12.00 Uhr. Bei der Bearbeitung der Übungsblätter 1–12 können Sie insgesamt 144 Punkte (und evtl. einige Zusatzpunkte) sammeln. Einen Schein können Sie erhalten, wenn Sie mindestens 70 Punkte erreicht haben. Zu den Modalitäten zur Erlangung des Scheins schauen Sie bitte auf die Webseite der Vorlesung.