Aufgabe 1

$$p = det(A - XI_4) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -X & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -X & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -X \end{vmatrix} = (-X)\begin{vmatrix} -X & 0 & -2 \\ 0 & -X & -1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -X & -1 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix} =$$

$(-X)(-X^3 - 3X) - 1(X^2 - 2 + 1) = X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2 = (X-i)^2(X+i)^2$

$\implies EW \pm i, m = (X-i)^5(X+i)^5, 1 \leq s \leq 2$

$$E_{+i} = \text{Kern}(A - iI_4) = \cdots = \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}] \implies E_{-i} = [\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

$\implies \dim E_{\pm i} = 1 < 2 = \dim H_{\pm i} \implies$ Index $s = 2, m = 0$

komplementäre JNF: $\overline{A} = \begin{pmatrix} i & & & \\ 1 & i & & \\ & & -i & \\ & & 1 & -i \end{pmatrix}$

$$H_{\pm i} = \text{Kern}(A \mp iI_4)^2 = [\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}] \implies H_{-i} = [\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

Komplementäre Jordanbasis: z_1, z_2, z_3, z_4 mit z_1, z_2 zum EW_i und $z_3 = \overline{z_1}, z_4 = \overline{z_2}$

Wähle $z_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z_2 = (A - iI_4) \cdot z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Setze: $\overline{S} := (z_1|z_2|z_3|z_4)$. Dann $\overline{A} = \overline{S}^{-1} \cdot A \cdot \overline{S}$

<u>Relle JNF $\tilde{A}$ von A</u>: In $\overline{A}$ gibt es ein Kästchen (der Länge 2) zum EW i und 1 Kästchen zum EW -i (ebenfalls Länge 2) $\implies$ in $\tilde{A}$ gibt es nur <u>ein</u> Kästchen (der Länge 4); $a = Re(i) = 0, b = Im(i) = 1$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

reelle Jordanbasis: $x_i = \frac{1}{2}(z_i + \overline{z}_i), y_i = -\frac{i}{2}(z_i - \overline{z}_i), i = 1, 2$

$$\implies x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setze $S = (x_1|y_1|x_2|y_2)$. Dann $\tilde{A} = S^{-1}AS$.

Aufgabe 2 c)

$V = \{(x_i) \in \mathbb{R}^n | (x_i) \text{beschränkt}\}, <(x_i),(y_i)> = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i y_i}{i^2} (< \cdots >: V \times V \to \mathbb{R})$ Da $(x_i),(y_i)$ beschränkt, ex. $c \in \mathbb{R}$ so dass $|x_i| < c$ und $|y_i| < c \forall i \in \mathbb{N}$

$\implies <(x_i),(y_i)> = \sum_k \frac{|x_k| \cdot |y_k|}{k^2} \leq c^2 \cdot \sum_{k=1} \frac{1}{k^2} < \infty$

pos. def.: Für $(x_i) \neq 0$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k \neq 0 \implies <(x_i),(x_i)> = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{k^2} \geq \frac{x_{k'}^2}{k'^2} > 0$, und $<0,0> = 0$

$f(x) = 2x - 1 \implies f \neq 0, <f,f> = 0 \implies$ kein Skalarprodukt.

Aufgabe 3

$n \in \mathbb{N}, V = \mathbb{R}^{n \times n}$

a) $<A,B> := \text{Spur}(A^T B)$ ist Skalarprodukt

Beweis: $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) = A^T B$ mit $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{kj}$

$\implies <A,B> = \text{Spur}(C) = \sum_{m=1}^{n} c_{mm} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{km} bkm \implies <\dot{,}>$ ist gerade das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{n \times n}$

Definition:$<\cdot,\cdot>: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit $<x,y> := \sum_{c=1}^{m} x_i y_i$ für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ heißt Standardskalarprodukt.

b) $\|A\|_0 = sqrt{<A,A>}$, $\|x\|$ Standardnorm, induziert von Standardskalarprodukt $<\dot{,}>_n$

Behauptung: $\|Ax\| \leq \|A\|_0 \cdot \|x\|$

Beweis: $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})^T \ldots$ i-te Zeile von A (als Spaltenvektor). Dann $Ax = \begin{pmatrix} <a_i,x>_n \\ \vdots \\ <a_n,x>_n \end{pmatrix} \implies$

$\|Ax\|^2 =< Ax, Ax >_n= \sum\limits_{i=1}^{n} < a_i, x >^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} (\|a_i\| \cdot \|x\|)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \|a_i\|^2)\|x\|^2 =(\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2) \cdot \|x\|^2 = \|A\|_0^2 \|x\|^2$
Behauptung.

Aufgabe 4

$(v, \| \cdot \|)$ normierter Vektorraum, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \forall x, y \in V$
Behauptung: $\exists$ Skalarprodukt $< \cdot, \cdot >$ auf V mit $\|x\| = \sqrt{< x, x >} \forall x \in V$
Falls $< \cdot, \cdot >$ existiert, so ist es eindeutig, denn es gilt $4 < x, y >= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \forall x, y \in V$
Ansatz: $< x, y >:= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \forall x, y \in V$
pos. def.: $< x, x >= \|x\|^2 > 0$ für $x \neq 0$ und $= 0 frx = 0$
symm.: $< x, y >= \frac{1}{q}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4}(\|y + x\|^2 - |y - x\|^2) =< y, x >$
Linearität im 1. Argument: $\forall c \in \mathbb{R} :< cx, y >= c < x, y >$

(1) $c \in \mathbb{N} :< nx, y >=< x + (n - 1)x, y >$

(2) $c \in \mathbb{Q} : n, m \in \mathbb{N} < \frac{n}{m}x, y >= \frac{n}{m}m < \frac{1}{m}x, y >= \cdots =< 0, y >= 0$

(3) $c \in \mathbb{R}$ Durch Approximation. $\exists (a_i) \in \mathbb{Q}$ mit ...