Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Arbeitsgruppe Differentialgeometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)
Aufgabenvorschläge für das 1. Tutorium

Themen: Wiederholung - Determinanten, Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit

Vorschlag 1.
Man berechne die Determinanten der folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2-a & a-1 & -1 \\ a+2 & 0 & 2 & a+2 \\ a+2 & 0 & a+1 & 3 \\ -1 & a-2 & a-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vorschlag 2.
Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme die Eigenwerte und Eigenräume von A und skizziere die Eigenräume in der Zeichenebene. Man bestimme zeichnerisch das Bild des Vektors $v = (1,2)$ unter der durch $x \mapsto Ax, x \in \mathbb{R}^2$ definierten linearen Abbildung. Wie kann man sich diagonalisierbare Endomorphismen anschaulich-geometrisch vorstellen?

Vorschlag 3.
Man bestimme jeweils Eigenwerte und Eigenräume der folgenden reellen Matrizen A. Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, finde man eine reelle Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$

(d) $A = \begin{pmatrix} a-1 & -a & a & 0 \\ 1 & 2a & -a & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & a & a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$

Vorschlag 4.
Man zeige, dass eine Projektion $\pi : V \longrightarrow V$ nur die Eigenwerte 0 und 1 besitzen kann.

Zur Erinnerung: Eine lineare Abbildung $\pi : V \to V$ heißt *Projektion*, falls $\pi^2 = \pi$ gilt.

Vorschlag 5.
Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Jede Zeilensumme von A habe den Wert 1.
Man zeige, dass A den Eigenwert 1 hat.