FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)

Aufgaben für die Tutorien zum 4. Übungsblatt

Themen: reelle Jordansche Normalform, Skalarprodukt

Vorschlag 1.
Bestimme die reelle Jordansche Normalform der folgenden Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Gib für a) und b) jeweils eine Transformationsmatrix S an, die die Matrix A in ihre reelle JNF $\tilde{A}$ überführt (d.h., so dass $\tilde{A} = S^{-1}AS$ gilt).

Vorschlag 2.
In welchen der folgenden Fälle ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum V?

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle x, y \rangle := x_1 y_1 - x_2 y_2$

(b) $V = \mathbb{R}^{n \times n}$, $\langle A, B \rangle := \mathrm{Spur}(A \cdot B)$

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle x, y \rangle := 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$.

(d) $V = C([0,1])$, $t_0 \in [0,1]$ fest, $\langle f, g \rangle := f(t_0) \cdot g(t_0)$

Vorschlag 3.
Seien $n \in \mathbb{N}$, $V = \{p \in \mathbb{R}[X] : \mathrm{Grad}\ p < n\}$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ fest vorgegebene, paarweise verschiedene Zahlen. Man zeige, dass dann durch

$$\langle p, q \rangle := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} p(x_j) q(x_j),\ p, q \in V$$

ein Skalarprodukt auf V definiert ist.

Vorschlag 4.
Man zeige, dass für den Betrag komplexer Zahlen die Parallelogrammidentität gilt: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist

$$\|z + w\|^2 + \|z - w\|^2 = 2\|z\|^2 + 2\|w\|^2.$$

Vorschlag 5.
Zeige: Die Norm $\| \cdot \| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\|x\| := |x_1| + |x_2|$ wird *nicht* von einem Skalarprodukt induziert.