FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

# Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)

## Aufgaben für die Tutorien zum 6. Übungsblatt

*Themen:* Orthonormalbasis, Orthogonalprojektion, Abstand von Unterräumen

**Vorschlag 1.**
Bestimme unter allen reellen Polynomen $p$ vom Grad $\leq 1$ dasjenige, für das

$$\int_{-1}^{1} (p(x) - |x|)^2 \, dx$$

minimal wird. (*Hinweis: Projeziere $f : x \mapsto |x|$ auf einen UVR von $C[-1,1]$.*)

**Vorschlag 2.**
Im $\mathbb{R}^5$ (versehen mit dem Standard-Skalarprodukt) seien ein Untervektorraum $U$ und ein Vektor $x$ folgendermaßen gegeben:

$$U = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}], \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Berechne das Bild $\pi(x)$ von $x$ unter der Orthogonalprojektion $\pi$ von $\mathbb{R}^5$ auf $U$ sowie den Abstand von $x$ zu $U$.

**Vorschlag 3.**
Im $\mathbb{R}^3$ seien die beiden Geraden

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}] \quad \text{und} \quad h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

gegeben. Bestimme den Abstand von g und h.

**Vorschlag 4.**
Seien $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $v_1, \ldots, v_n$ ein Orthonormalsystem von $V$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $v_1, \ldots, v_n$ ist eine Basis von $V$.

(ii) Ist $v \in V$, so folgt aus $\langle v, v_i \rangle = 0$ für jedes $i = 1, \ldots, n$, dass $v = 0$ gilt.

**Vorschläge des 5. Tutorienblatts (soweit noch nicht behandelt; insbesondere 7)**