Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Arbeitsgruppe Differentialgeometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)

Aufgaben für die Tutorien zum 7. Übungsblatt

Themen: adjungierte Abbildungen, Selbstadjungiertheit

Vorschlag 1.
Es seien V, W, X euklidische Vektorräume, $\Phi, \Phi_1, \Phi_2 : V \to W$ linear, $\Psi : W \to X$ linear, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Es sei vorausgesetzt, dass Φ^*, Φ_1^*, Φ_2^*, Ψ^* existieren. Zeige:

(a) $(\Phi^*)^* = \Phi$

(b) $(a_1\Phi_1 + a_2\Phi_2)^* = a_1 \cdot \Phi_1^* + a_2 \cdot \Phi_2^*$

(c) $(\Psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Psi^*$

Vorschlag 2.
Es seien V, W endlichdimensionale euklidische Vektorräume und $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Zeige:

(a) $\mathrm{Kern}\,\Phi^* = (\mathrm{Bild}\,\Phi)^\perp$

(b) $\mathrm{Bild}\,\Phi \oplus \mathrm{Kern}\,\Phi^* = W$

(c) Φ surjektiv $\Leftrightarrow$ Φ^* injektiv   und Φ injektiv $\Leftrightarrow$ Φ^* surjektiv

Vorschlag 3.
Es seien wieder V ein euklidischer Vektorraum und $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ so dass Φ^* existiert. Zeige, dass es eine selbstadjungierte Abbildung $\Psi_1 \in \mathrm{Hom}(V, V)$ und eine antiselbstadjungierte Abbildung $\Psi_2 \in \mathrm{Hom}(V, V)$ gibt mit $\Phi = \Psi_1 + \Psi_2$.

Vorschlag 4.
Es seien V ein euklidischer Vektorraum, $x_0 \in V$, $a \in \mathbb{R}$. Die lineare Abbildung $\Phi : V \to V$ sei definiert durch $x \mapsto ax - \langle x, x_0 \rangle \cdot x_0$.

(a) Zeige, dass Φ selbstadjungiert ist.

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung $\langle \Phi(x), x \rangle \geq 0$ für alle $x \in V$?

Vorschlag 5.
Im $\mathbb{R}^2$ (mit Standardskalarprodukt) sei der Endomorphismus Φ gegeben, der bzgl. der Basis $B = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$ die Abbildungsmatrix

$$A_\Phi = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$$

habe. Ist Φ selbstadjungiert? Bestimme Φ^*.