Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei K ein Körper und $f = X^3 + X^2 + X + 1 \in K[X]$. Zerlegen Sie f in irreduzible Faktoren für

(a) $K = \mathbb{Q}$,

(b) $K = \mathbb{R}$,

(c) $K = \mathbb{C}$,

(d) $K = \mathbb{F}_5$.

Hinweis: Für ein gegebenes $\alpha \in K$ mit $f(\alpha) = 0$ ist $(X - \alpha)$ ein Faktor von f. Sie können f also durch $(X - \alpha)$ teilen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi \in \mathbb{Q}[X]$ und das Minimalpolynom $\mu \in \mathbb{Q}[X]$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$

und berechnen Sie die Haupträume von A.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Weiter seien Φ und Ψ Endomorphismen von V mit $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$. Zeigen Sie:

(a) Die Eigenräume von Φ sind Ψ-invariant.

(b) Sind Φ und Ψ diagonalisierbar, so sind Φ und Ψ auch simultan diagonalisierbar, d. h. es gibt eine Basis B von V, so dass sowohl $D_{B,B}(\Phi)$ als auch $D_{B,B}(\Psi)$ Diagonalgestalt haben.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von V. Weiter seien $f, g \in K[X]$ mit $d = \mathrm{ggT}(f, g)$ und $v = \mathrm{kgV}(f, g)$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Kern}(d(\Phi)) = \mathrm{Kern}(f(\Phi)) \cap \mathrm{Kern}(g(\Phi))$.

(b) $\mathrm{Kern}(v(\Phi)) = \mathrm{Kern}(f(\Phi)) + \mathrm{Kern}(g(\Phi))$.

(c) Bezeichnet μ das Minimalpolynom von Φ, so ist $f(\Phi)$ genau dann bijektiv, wenn $\mathrm{ggT}(f, \mu) = 1$.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 29. 04. 2016, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!