

A1

$$f = x^3 + x^2 + x + 1$$

-1 $\in K$ ist NST von f

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1) = x^2 + 1 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ x + 1 \end{array}$$

a) b) $f = (x+1)(x^2+1)$ irreduzibel über $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

c) $f = (x+1)(x+i)(x-i)$

d) In $K = \mathbb{F}_5$ ist $x = 2$ NST von x^2+1

$$\begin{array}{r} (x^2 + 1) : (x - 2) = x + 2 \\ \underline{x^2 - 2x} \\ 2x + 1 \\ \underline{2x - 4} \\ 0 \end{array}$$

$$f = (x+1)(x+2)(x-2)$$

A2

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CP(A):

$$\det(X - A) = \det \begin{pmatrix} X-6 & 4 & 1 & -1 \\ -2 & X & 1 & 0 \\ -4 & 4 & X-1 & -1 \\ 4 & -4 & 0 & X \end{pmatrix}$$

letzte
Spalte

$$= \det \begin{pmatrix} -2 & X & 1 \\ -4 & 4 & X-1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} X-6 & 4 & 1 \\ -2 & X & 1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} + X \det \begin{pmatrix} X-6 & 4 & 1 \\ -2 & X & 1 \\ -4 & 4 & X-1 \end{pmatrix}$$

$$= \left[4 \cdot X \cdot (X-1) + 16 - 16 - 8(X-1) \right] + \left[16 + 8 - 4X + 4(X-6) \right]$$

$$+ X \left[X(X-1)(X-6) - 16 - 8 + 4X - 4(X-6) + 8(X-1) \right]$$

$$= 4(X-1)(X-2) + X \left[X(X-1)(X-6) + 8(X-1) \right]$$

$$= (X-1) \left[4(X-2) + X^2(X-6) + 8X \right]$$

$$= (X-1) \left[4X - 8 + X^3 - 6X^2 + 8X \right]$$

$$= (X-1) \left[X^3 - 6X^2 + 12X - 8 \right]$$

$$= (X-1)(X-2)^3$$

}
MP(A) ist von der Form $(X-1)(X-2)^k$ mit $k \in \{1, 2, 3\}$

Wir erraten einen EV zum EW 1:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und einen EV zum EW 2:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt ergänzen wir zu Basis $\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_4} \right\}$

Dann ist für $\phi: x \mapsto Ax$

$$D_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} =: C$$

$MP(A) = MP(C)$ und

$$(C - I)(C - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8+4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \neq 0$$

$$(C - I)(C - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4-8+4 & -1+4-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-4 & -2+2 \\ 0 & 0 & 8-8 & -4+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow MP(A) = (x-1)(x-2)^2.$$

Berechne $\text{Kern}(C - 2I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \left\{ \lambda u_1 + \mu u_2 + \kappa u_3 - \lambda u_4 \mid \lambda, \kappa, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda + \mu + \kappa \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \mid \lambda, \kappa, \mu \in \mathbb{Q} \right\}$$

ist der Hauptraum zu $\lambda = 2$.

und $\langle u_1 \rangle$ ist Eigen- und Hauptraum zu $\lambda = 1$.

Fehlt Eigenraum zu $\lambda = 2$.