Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Berechnen Sie die Jordan-Normalform J der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & -3 & 5 & -1 \\ -6 & -6 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

sowie eine Matrix S mit $S^{-1}AS = J$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Finden Sie eine Menge $M \subseteq \mathbb{Q}^{8\times 8}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Jedes $A \in M$ hat das charakteristische Polynom $(X-2)^3(X-3)^5$.

(ii) Jedes $A \in M$ hat das Minimalpolynom $(X-2)^2(X-3)^2$.

(iii) $A, B \in M$ sind nur dann ähnlich, wenn $A = B$.

(iv) M ist maximal mit den Eigenschaften (i)–(iii), d. h. es gibt keine Menge $M' \subseteq \mathbb{Q}^{8\times 8}$, $M' \supsetneq M$, die ebenfalls die Eigenschaften (i)–(iii) besitzt.

Begründen Sie, warum ihre Menge M die Eigenschaften (i)–(iv) besitzt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{C}$, für die die Gleichung

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2\alpha + 1 & \alpha + 3 & -\alpha + 1 \\ -\alpha - 1 & -2 & \alpha \\ \alpha + 1 & \alpha + 2 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ besitzt, und geben Sie für $\alpha = -1$ und $\alpha = 4$ eine solche Lösung an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien K ein Körper, $d \geq 1$ und $f \in K[X]$ ein Polynom.

(a) Berechnen Sie $f(J_d(\lambda))$.

(b) Schließen Sie, dass für alle $e \in \mathbb{N}_0$ die Formel $\operatorname{Rang}(J_d(0)^e) = \max(0, d-e)$ gilt.

(c) Sei nun $A \in K^{d\times d}$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom über K in Linearfaktoren zerfällt. Berechnen Sie $\det(f(A))$.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 06. 05. 2016, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!