Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Weiter seien β eine symmetrische Bilinearform auf V und $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von V bzgl. β. Zeigen Sie, dass für alle $v \in V$ die sogenannte Fourierformel

$$v = \sum_{i=1}^{n} \beta(b_i, v) \cdot b_i$$

gilt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Es sei $V = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \le 2\}$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad kleiner 3.

(a) Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$(f, g) \mapsto \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x$$

eine Bilinearform $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$ auf V definiert. Ist $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$ symmetrisch?

(b) Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix F_B von $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$ bezüglich der Basis $B = (6X-2, -3X+4, 6X^2-5X+1)$ von V. Ist $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$ entartet?

(c) Zeigen Sie, dass $C' = (c_1, c_2, c_3)$ mit $c_1 = X$, $c_2 = X - \frac{2}{3}$ und $c_3 = 6X^2 - 6X + 1$ eine Orthogonalbasis von V bzgl. $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$ ist und finden Sie $\lambda_i \in \mathbb{R}$, so dass $C = (\lambda_1 c_1, \lambda_2 c_2, \lambda_3 c_3)$ eine Orthonormalbasis von V bzgl. $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$ ist.

(d) Finden Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $S^\top S = F_B$. Dabei bezeichne F_B die Fundamentalmatrix von $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$ aus Teilaufgabe (b).

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei K ein Körper der Charakteristik $\operatorname{char} K \neq 2$. Weiter seien V und W K-Vektorräume und $\beta\colon V \times V \to W$ eine bilineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Die Aussagen

  (i) $\beta(x, y) = -\beta(y, x)$ für alle $x, y \in V$.

  (ii) $\beta(x, x) = 0$ für alle $x \in V$.

sind äquivalent. Eine bilineare Abbildung, die eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt, heißt *antisymmetrisch.*

(b) Die Abbildung $\sigma\colon V \times V \to W$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(\beta(x + y, x + y) - \beta(x, x) - \beta(y, y))$ ist eine symmetrische bilineare Abbildung.

(c) Die Abbildung $\alpha\colon V \times V \to W$, $(x, y) \mapsto \beta(x, y) - \sigma(x, y)$ ist eine antisymmetrische bilineare Abbildung.

(d) Die Zerlegung $\beta = \sigma + \alpha$ in eine symmetrische und eine antisymmetrische bilineare Abbildung ist eindeutig.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien U, V und W Vektorräume über einem Körper K. Zeigen Sie:

(a) Das Tensorprodukt $(V \otimes W, \tau)$ ist – falls es existiert – eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie, d. h. für je zwei Vektorräume T_0 und T_1 zusammen mit bilinearen Abbildungen $\tau_i \colon V \times W \to T_i$, die jeweils die universelle Eigenschaft von $(V \otimes W, \tau)$ besitzen, gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $\Phi \colon T_0 \to T_1$, so dass $\tau_1 = \Phi \circ \tau_0$.

(b) Es gibt eine Bijektion $\mathrm{Bil}(U \times V, W) \cong \mathrm{Hom}(U \otimes V, W)$.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 13. 05. 2016, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!