Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Wir betrachten den komplexen Vektorraum $V = \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie:

(a) Das Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V ist tatsächlich ein Skalarprodukt.

(b) Ist $n = m^2$ und identifizieren wir $V = \mathbb{C}^n$ komponentenweise mit dem Vektorraum $\mathbb{C}^{m \times m}$ der $m \times m$-Matrizen, so ist das Standardskalarprodukt durch $\langle A, B \rangle = \mathrm{Spur}(AB^*)$ gegeben. Dabei sei $B^* = \overline{B^\top}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien K ein Körper, $V = K^3$ und $\beta \colon V \times V \to K$ eine nicht ausgeartete Bilinearform. Für $u, v \in V$ definieren wir vermöge der Vorschrift $w \mapsto \det(u\ v\ w)$ eine Abbildung $D_{uv} \colon V \to K$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung D_{uv} ist für jede Wahl von $u, v \in V$ eine Linearform auf V.

(b) Zu je zwei Vektoren $u, v \in V$ gibt es ein eindeutiges $k(u, v) \in V$, so dass $D_{uv}(w) = \beta\big(k(u, v), w\big)$ für alle $w \in V$.

(c) Die Zuordnung $(u, v) \mapsto k(u, v)$ ist eine antisymmetrische, bilineare Abbildung $k \colon V \times V \to V$.

Es seien nun $K = \mathbb{R}$ und β ein Skalarprodukt. Zeigen Sie:

(d) Sind u und v linear unabhängig, so ist $\langle k(u, v) \rangle = \{w \in V \mid \beta(w, u) = \beta(w, v) = 0\}$.

(e) Berechnen Sie für $\beta(u, v) = u^\top \cdot v$ den Vektor $k(u, v)$ explizit.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien $K \subseteq L$ Körper und V sei ein K-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass $L \otimes_K V$ ein L-Vektorraum ist.

(b) Geben Sie für $\dim_K(V), \dim_K(L) < \infty$ die Dimension von $L \otimes_K V$ über K bzw. L in Abhängigkeit von $\dim_K(V)$ und $\dim_K(L)$ an.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Es sei V ein komplexer Vektorraum und $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}$ sei eine Norm auf V, welche der Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$$

genügt. Wir fassen V als metrischen Raum mit der Metrik $d(x,y) = \|y-x\|$ auf. Weiter definieren wir durch

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big) + \frac{i}{4}\Big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\Big)$$

eine Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie:

  (i) $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ für alle $x \in V$.

  (ii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist hermitesch.

  (iii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist in beiden Argumenten additiv.

  (iv) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ und $\langle x, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}(i) = \{\alpha + \beta i \in \mathbb{C} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$.

  Hinweis: Betrachten Sie für (iv) zuerst einmal $\langle \lambda x, y\rangle$ und $\langle \lambda i x, y\rangle$ mit $\lambda \in \mathbb{Z}$.

(b) Überzeugen Sie sich davon, dass die Norm $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}$, die Addition $+ \colon V \times V \to V$, die Skalarmultiplikation $\cdot \colon \mathbb{C} \times V \to V$ sowie die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{C}$ stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen sind. Dabei sei das Produkt $X \times Y$ zweier metrischer Räume (X, d_X), (Y, d_Y) mit der Metrik $d_{X\times Y}\big((x,y),(x',y')\big) = \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}$ versehen.

(c) Betrachten Sie für $\alpha \in \mathbb{C}$ und eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}(i)$, welche gegen α konvergiert, die Folge $|\langle \lambda_n x, y\rangle - \langle \alpha x, y\rangle|$ und schließen Sie, dass $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 20. 05. 2016, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!