Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Wir betrachten den reellen Vektorraum $V = \mathbb{R}^5$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = x^\top \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot y$$

sowie den Unterraum

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq V.$$

(a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von U und erweitern Sie diese zu einer Orthonormalbasis von V.

(b) Berechnen Sie den Abstand des Vektors $p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$ von U sowie das Lot von p auf U.

(c) Berechnen Sie den Abstand der Geraden

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

von U sowie das Lot zwischen g und U und die Lotfußpunkte.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Berechnen Sie die Iwasawa-Zerlegung der reellen Matrix

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Weiter seien $M, N \subseteq V$ Teilmengen von V. Zeigen Sie:

(a) Ist $M \subseteq N$, so ist $M^\perp \supseteq N^\perp$.

(b) $\langle M \rangle^\perp = M^\perp$.

(c) $\langle M \rangle$ ist ein Unterraum von $(M^\perp)^\perp$.

(d) $M^\perp = \big((M^\perp)^\perp\big)^\perp$.

(e) Bezeichnet $\iota\colon V \to V^*$ den Isomorphismus $v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$, so gilt

$$M^\perp = \bigcap_{m \in M} \operatorname{Kern} \iota(m).$$

(f) $V = \langle M \rangle \oplus M^\perp$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine endliche Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $F = A^\top \overline{A}$ für jedes $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die Fundamentalmatrix eines Skalarprodukts auf $\mathbb{C}^n$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass es ein G-invariantes Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, d. h. ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mit $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $A \in G$, gibt.

(c) Zeigen Sie, dass es eine invertierbare Matrix S mit $S^{-1}GS = \{S^{-1}AS \mid A \in G\} \subseteq U(n)$ gibt.

(d) Berechnen Sie für

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ein G-invariantes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{C}^2$ wie in (b) und eine Matrix S wie in (c).

Abgabe bis spätestens Freitag, den 27. 05. 2016, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!